研究生教学用书
教育部研究生工作办公室推荐

弹性力学与张量分析

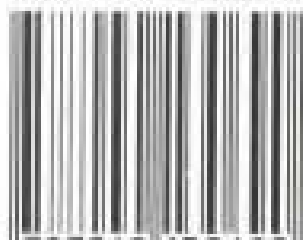
Theory of Elasticity and Tensor Analysis

郭日修 编著

高等教育出版社

研究生教学用书 教育部研究生工作办公室推荐

ISBN 7-04-013069-6



9 787040 130690 >

定价 25.50 元

研究生教学用书

教育部研究生工作办公室推荐

弹性力学与张量分析

Theory of Elasticity and Tensor Analysis

郭日修 编著

高等教育出版社

内容简介

本书是“教育部推荐研究生教学用书”，包括弹性力学和张量分析两课程的内容。

本书第一篇张量分析，讨论张量的概念、张量代数和张量分析。本篇以普遍张量为讨论对象，引导读者在正确理解张量概念的基础上掌握张量分析这一数学工具。第一篇相对独立地可作为研究生张量分析课程教材。

本书第二、三篇合为弹性力学。第二篇弹性力学基本方程，含应力分析、应变分析、应力－应变关系、弹性力学基本方程。第三篇弹性力学问题及解题方法，含若干线弹性力学问题的精确解、几个应用弹性力学问题、能量原理、近似/数值解法。这部分内容的特点是：以普遍张量为工具阐述弹性力学基本理论和方法；加大了弹性力学应用问题和近似/数值解法的篇幅；讨论了有限应变张量和大变形应力张量。第二、三篇可作为研究生弹性力学课程教材。

本书可作为高等学校船舶与海洋工程、航空宇航、交通运输、土木、水利、机械等工程专业的研究生教材。也可供高等学校工程力学专业研究生和从事结构分析的科研、设计人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学与张量分析／郭日修编著．—北京：高等教育出版社，2003．10

ISBN 7－04－013069－6

Ⅰ．弹…　Ⅱ．郭…　Ⅲ．①弹性力学－研究生－教材②张量分析－研究生－教材　Ⅳ．①O343②O183．2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 080138 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－82028899		http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　高等教育出版社印刷厂

开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 10 月第 1 版
印　　张	18．25	印　　次	2003 年 10 月第 1 次印刷
字　　数	310 000	定　　价	25．50 元

前　言

根据“教育部办公厅关于2001—2002年度研究生教学用书入选书目的通知”(教研厅函[2002]2号),《弹性力学与张量分析》一书入选“教育部推荐研究生教学用书”,这是对本书的高度评价。

本书开始成书并在教学使用中不断修改、充实,至今已20年。1981年,海军工程学院(海军工程大学前身)开始招收硕士研究生,作者担任船舶结构力学专业硕士研究生指导教师,并给研究生讲授弹性力学课程,它是该专业研究生的学位课程。研究生的弹性力学课程讲什么?怎么讲?在当时是个新问题。作者查阅了国内、外很多弹性力学书,经过分析,作者认为,研究生的弹性力学课程应该在本科专业的弹性力学和相关课程,如结构力学等的基础上开展教学。因此,研究生的弹性力学课程应当有新的起点,新的内容和新的深度。在这样的思想指导下,作者决定研究生的弹性力学课程采用张量(普遍张量)表示。因为:(1)弹性力学中基本的力学量,如应力、应变、弹性模量等都是张量,采用张量表示能更深刻地描述这些量的物理实质;(2)用普遍张量表示的方程具有不变性,坐标变换时方程不变,这提高了研究生针对问题的特点选择适当的坐标系的能力;(3)当代固体力学领域的文献,愈来愈多地采用张量表示,研究生掌握了张量分析这个工具,可以提高他们阅读文献的能力。

为此,作者给硕士研究生开设一门张量分析课程,作为弹性力学课程的先修课程。本书第一篇张量分析即是作者为研究生讲授张量分析课程的内容。这一篇的特点是:(1)以普遍张量为讨论对象,有广泛的适用性;(2)着重阐述张量的基本概念和基本运算方法,不过分追求数学上的严密,重在使研究生能正确理解和运用张量分析这一数学工具。

本书第二篇是弹性力学基本方程,包括应力分析,应变分析,应力-应变关系,弹性力学的基本方程等四章。第二篇的特点是:(1)用普遍张量建立弹性力学基本方程,使研究生通过这部分内容的学习掌握张量分析这个数学工具的应用;(2)采用张量表示,能更深刻地描述弹性力学基本概念和基本方程的物理实质,使研究生对弹性力学有更深刻的理解;(3)采用普遍张量表示的弹性力学基本方程在坐标变换时具有不变性,从而提高了研究生处理弹性力学问题的能力;(4)推导了有限变形的应变张量和大变形的应力张量的表示式,包括拉格朗日有限应变张量、欧拉有限

应变张量,以及拉格朗日应力张量和基尔霍夫应力张量。将非线性应变张量和应力张量纳入本课程,可以引导研究生由传统的线性弹性力学领域进入非线性弹性力学领域,拓宽研究生的基础理论。

本书第三篇是弹性力学问题及解题方法。这一篇的特点是:在内容选取上适当减少传统的弹性力学的理论性内容,加大弹性力学应用问题和近似解法及数值解法的分量,以提高研究生应用弹性力学解决工程问题的能力,并为应用计算机解弹性力学问题建立理论基础。因此,在第八章若干线弹性力学问题的精确解中,只选择球对称问题、轴对称问题、圣维南问题、平面问题等几个典型的线弹性力学问题,讨论求精确解的方法。第九章几个应用弹性力学问题,着重讨论铁木辛柯梁和赖斯纳板理论,它们在工程中广为应用;也使研究生认识如何从弹性力学基本方程出发建立实际工程问题的数学模型。第十章弹性力学的能量原理讨论三个基本的变分原理,它们不仅可以用来建立弹性力学基本方程和边界条件,而且是弹性力学近似解法和数值解法的理论基础。第十章近似解法和数值解法,讨论几种解弹性力学问题广为应用的近似方法和数值方法——里茨法、加权残量法、有限差分法、有限元法,为应用计算机解弹性力学问题建立理论基础。

本书各章后面附有一定数量的习题,其中证明定理和推导方程的题较多,其目的在于加深研究生对基本理论的理解和拓宽知识面。

本书可用作船舶与海洋工程、航空宇航科学与技术、交通运输工程、土木工程、水利工程、机械工程等专业研究生教材。本书第一篇可以相对独立地用作 20 学时张量分析课程的教材;第二篇和第三篇可以作为研究生 40 学时弹性力学课程的教材。

本书入选"教育部推荐研究生教学用书"过程中,全国学位与研究生教育发展中心组织专家进行评议,国务院学位委员会学科评议组召集人进行审定,教育部研究生办公室给予推荐,作者谨向他们致以衷心的感谢! 高等教育出版社承担本书出版工作,作者也致以衷心的感谢!

限于作者水平,书中不当之处在所难免,欢迎专家和读者批评指正。

郭日修

2002 年 12 月于海军工程大学

策划编辑 黎绪萍
责任编辑 薛春玲
封面设计 李卫青
责任绘图 吴文信
版式设计 史新薇
责任校对 殷 然
责任印制 韩 刚

郑重声明

购书请拨打电话：(010)64014089　64054601　64054588

目　　录

第一篇　张量分析

第一篇
张 量 分 析

第一章　张量的概念

§1.1 引　　言

什么是张量？这是读者在开始学习本课程时会提出的问题．现从读者已有的力学知识出发，举例对这个问题作一些初步的阐述，使读者对张量这个新的概念，有个初步的理解．

在三维空间，一个矢量（例如力矢量、速度矢量等）在某参考坐标系中，有三个分量．这三个分量的集合，规定了这个矢量．当坐标变换时，这些分量按一定的变换法则变换．

在力学中还有一些更复杂的量．例如受力物体内一点的应力状态，有 9 个应力分量，如以直角坐标表示，用矩阵形式列出，则有

$$(\sigma_{ij}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

这 9 个分量的集合，规定了一点的应力状态，称为应力张量．当坐标变换时，应力张量的分量按一定的变换法则变换．再如，一点的应变状态，具有和应力张量相似的性质，称为应变张量．

把上述的力矢量、速度矢量、应力张量、应变张量等量的性质抽象化，撇开它们所表示的量的物理性质，抽出其数学上的共性，便得出抽象的张量概念．所谓张量是一个物理量或几何量，它由在某参考坐标系中一定数目的分量的集合所规定，当坐标变换时，这些分量按一定的变换法则变换．张量有不同的“阶”和“结构”，这由它们所遵循的不同的变换法则来区

分.矢量是一阶张量;应力张量、应变张量是二阶张量;还有三阶、四阶、……等高阶张量.可以看出,张量是矢量概念的推广.关于张量的严密的解析定义,将在§1.8中讨论.

由张量的特性可以看出,它是一种不依赖于特定坐标系的表达物理定律的方式.采用张量记法表示的方程,在某一坐标系中成立,则在容许变换的其他坐标系中也成立,即张量方程具有不变性.这使它特别适合于表达物理定律,因为物理定律与人们为了描述它所采用的坐标系无关.因此,张量分析为人们提供了推导基本方程的有力工具.此外,张量记法简洁,是一种非常精炼的数学语言.

张量这个名词是沃伊特(Voigt)首先提出的,用来表示晶体的应力(张力)状态,可见张量分析与弹性力学关系的密切.张量分析在力学领域中有广泛的应用,是力学工作者的重要数学工具.

§1.2 符号与求和约定

一、指标

在张量分析中广泛运用指标.几个变量的集合 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 可表示为 x_i, $i=1,2,3,\cdots,n$.几个变量的集合 $y^1, y^2, y^3, \cdots, y^n$ 可表示为 y^j, $j=1,2,3,\cdots,n$.必须指出,$y^1, y^2, \cdots, y^n$ 是 n 个独立变量,而不是变量 y 的 1 到 n 次幂.写在字符右下角的指标,例如 x_i 中的 i 称为下标.写在字符右上角的指标,例如 y^j 中的 j 称为上标.在以后的讨论中将说明使用上标或下标的涵义是不同的.

用作下标或上标的拉丁字母或希腊字母,除非作特别的说明,一般取从 1 到 n 的所有整数,其中 n 称为指标的范围.本书采用下述关于范围的规定来表明三维空间和二维空间的量的区别:所有拉丁字母指标 i、j、k、l、m、…的范围是 1,2,3;所有希腊字母指标 α、β、γ、δ、…的范围是 1,2.例如坐标 x^i,指标 $i=1,2,3$ 的三维空间的坐标,坐标 x^α 是 $\alpha=1,2$ 的二维空间的坐标.

为了区别上标与乘幂,通常用括号表示乘幂,如 $(x^i)^2$ 表示 x^i 的二次方.

二、求和约定

若在一项中,同一个指标字母在上标和下标中重复出现,则表示要对这个指标遍历其范围 $1,2,3,\cdots,n$ 求和.这是一个约定,称为求和约定.

例如三维空间的平面方程为

$$a_1z^1+a_2z^2+a_3z^3=p \tag{1.2-1}$$

式中 a_i，p 是常数. 这个方程可写成

$$\sum_{i=1}^{3} a_iz^i=p \tag{1.2-2}$$

应用求和约定，则这个方程可写成如下形式

$$a_iz^i=p \tag{1.2-3}$$

遍历指标范围求和的重复指标称为哑指标或跑标. 由于哑指标只是表示求和，因此无论用哪个字母作哑指标都是一样的. 例如 a_iz^i 可以写成 a_jz^j 等. 相对于哑指标(求和指标)而言，不求和的指标称为自由指标.

为了避免混淆，在一项中，同一个指标字母的使用不能超过两次. 例如不能把 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ix^i\right)^2$ 写成 $a_ix^ia_ix^i$，而应写成 $a_ia_jx^ix^j$.

三、克罗内克(Kronecker)符号 δ_j^k

克罗内克符号 δ_j^k 的定义是

$$\delta_j^k=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases} \tag{1.2-4}$$

这样

$$\begin{gathered}\delta_1^1=\delta_2^2=\delta_3^3=1\\ \delta_2^1=\delta_1^2=\delta_3^2=\delta_2^3=\delta_3^1=\delta_1^3=0\end{gathered} \tag{1.2-5}$$

克罗内克符号也可写成 δ_{kj} 或 δ^{kj}.

下面举例说明克罗内克符号的应用. 例如空间直角坐标系中，分量为 dz^1，dz^2，dz^3 的线元长度的平方为

$$ds^2=(dz^1)^2+(dz^2)^2+(dz^3)^2 \tag{1.2-6}$$

应用克罗内克符号，上式可写成

$$ds^2=\delta_{ij}dz^idz^j \tag{1.2-7}$$

应当注意，上式中有二重求和，一个是遍历指标 i 的范围，另一个是遍历指标 j 的范围.

克罗内克符号有一些明显的性质，如 $\delta_j^kA^j=A^k$；$\dfrac{\partial x^k}{\partial x^j}=\delta_j^k$；$\delta_j^i\delta_k^j=\delta_k^i$ 等.

四、置换符号

置换符号 $e_{ijk}=e^{ijk}$ 定义为

$$e_{ijk}=e^{ijk}=\begin{cases}1 & \text{当 } i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的偶置换}(123、231、312)\\ -1 & \text{当 } i,j,k \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的奇置换}(213、132、321)\\ 0 & \text{当 } i,j,k \text{ 的任意二个指标相同}\end{cases} \tag{1.2-8}$$

i,j,k 的这些排列分别叫做循环排列、逆循环排列和非循环排列.

置换符号也称为里奇(Ricci)符号,它只是一个指标符号,可用来展开三阶行列式.令

$$a=\begin{vmatrix}a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{vmatrix}=a_1^1a_2^2a_3^3+a_1^2a_2^3a_3^1+a_1^3a_2^1a_3^2$$

$$a_1^1a_2^3a_3^2-a_1^2a_2^1a_3^3-a_1^3a_2^2a_3^1$$

若以 a_j^i 表示行列式中的普遍项,以 $|a_j^i|$ 表示行列式,则上述行列式可写成

$$a=|a_j^i|=e_{rst}a_1^ra_2^sa_3^t \tag{1.2-9a}$$

若将上式中各项的下标作一置换,例如置换为 $a_2^ra_1^sa_3^te_{rst}$ 这就相当于把行列式的两列互相交换,因而行列式改变符号,等于 $-a$,再置换一次,又改变一次符号,回到 $+a$.这种性质可表示成如下的形式:

$$ae_{lmn}=e_{rst}a_l^ra_m^sa_n^t \tag{1.2-9b}$$

将(1.2-9a)与(1.2-9b)式结合,则

$$|a_j^i|e_{lmn}=e_{rst}a_l^ra_m^sa_n^t \tag{1.2-9c}$$

同理可以得到

$$|a_j^i|e^{lmn}=e^{rst}a_r^la_s^ma_t^n \tag{1.2-9d}$$

五、克罗内克符号与置换符号的关系

克罗内克符号与置换符号之间存在一定的关系.今讨论如下:

9 个量 δ_j^i 作为单位矩阵的元素,它们的行列式等于 1.

$$\begin{vmatrix}\delta_1^1 & \delta_2^1 & \delta_3^1\\ \delta_1^2 & \delta_2^2 & \delta_3^2\\ \delta_1^3 & \delta_2^3 & \delta_3^3\end{vmatrix}=1$$

若用更普遍的形式表示上面的行列式,则有

$$A=\begin{vmatrix}\delta_l^r & \delta_m^r & \delta_n^r\\ \delta_l^s & \delta_m^s & \delta_n^s\\ \delta_l^t & \delta_m^t & \delta_n^t\end{vmatrix}$$

上式中若 $r,s,t=l,m,n=1,2,3$,则 $A=1$. 由于这些排列中的任一置换都改变行列式的符号,所以行列式 A 为

$$A=\begin{vmatrix}\delta_l^r & \delta_m^r & \delta_n^r\\ \delta_l^s & \delta_m^s & \delta_n^s\\ \delta_l^t & \delta_m^t & \delta_n^t\end{vmatrix}=e^{rst}e_{lmn}$$

展开上述行列式,得

$$e^{rst}e_{lmn}=\delta_l^r\delta_m^s\delta_n^t-\delta_l^r\delta_n^s\delta_m^t+\delta_n^r\delta_l^s\delta_m^t-\delta_n^r\delta_m^s\delta_l^t+\delta_m^r\delta_n^s\delta_l^t-\delta_m^r\delta_l^s\delta_n^t \tag{1.2-10}$$

使上式中的一个下标和一个上标相等,并利用关系式 $\delta_j^i\delta_k^j=\delta_k^i$,可从上式导出下面的关系式,称为 $e-\delta$ 等式,

$$\begin{aligned}e^{rst}e_{rmn}&=\delta_r^r(\delta_m^s\delta_n^t-\delta_n^s\delta_m^t)+\delta_n^r(\delta_r^s\delta_m^t-\delta_m^s\delta_r^t)+\delta_m^r(\delta_n^s\delta_r^t-\delta_r^s\delta_n^t)\\&=\delta_m^s\delta_n^t-\delta_n^s\delta_m^t\end{aligned} \tag{1.2-11}$$

$$e^{rst}e_{rsn}=3\delta_n^t-\delta_n^s\delta_s^t=2\delta_n^t \tag{1.2-12}$$

$$e^{rst}e_{rst}=2\delta_t^t=6 \tag{1.2-13}$$

利用这些结果,可以将行列式的展开公式(1.2-9b)化成另一个很有用的形式. 以 e^{lmn} 乘(1.2-9b)式两边,得

$$ae_{lmn}e^{lmn}=6a=a_l^ra_m^sa_n^te_{rst}e^{lmn} \tag{1.2-14}$$

六、求和约定可以推广到微分公式

设 $f(x^1,x^2,\cdots,x^n)$为 n 个独立变量 $x^1,x^2,\cdots,x^n$ 的函数,则它的微分可写成

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \tag{1.2-15}$$

在偏微商$\frac{\partial f}{\partial x^i}$中,$i$ 被认为是下标.

§1.3 曲线坐标

设 $z^k(k=1,2,3)$是点 $P(z)$的直角坐标. 若三个函数

$$x^k = x^k(z^1, z^2, z^3) \quad (k=1,2,3) \tag{1.3-1}$$

在区域 R 中有惟一的逆函数

$$z^k = z^k(x^1, x^2, x^3) \quad (k=1,2,3) \tag{1.3-2}$$

则点 P 有曲线坐标 x^k.

一般来说,从几何关系能写出(1.3-2)式.若 z^k 单值、连续,有连续的一阶偏导数,且雅可比(Jacobi)行列式 $J=\left|\frac{\partial z^k}{\partial x^l}\right|$ 在区域 R 内不等于 0,即

$$J=\left|\frac{\partial z^k}{\partial x^l}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial z^1}{\partial x^1} & \frac{\partial z^1}{\partial x^2} & \frac{\partial z^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial z^2}{\partial x^1} & \frac{\partial z^2}{\partial x^2} & \frac{\partial z^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial z^3}{\partial x^1} & \frac{\partial z^3}{\partial x^2} & \frac{\partial z^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0 \ (\text{在区域 } R) \tag{1.3-3}$$

则(1.3-2)式有惟一的逆函数(1.3-1)式.对应于 $x^1(z^1, z^2, z^3)$ = 常数;$x^2(z^1, z^2, z^3)$ = 常数;$x^3(z^1, z^2, z^3)$ = 常数,方程式(1.3-1)分别给出三个曲面,它们相交于 P 点.这三个曲面称为坐标曲面.任意两个坐标曲面的交线定义一坐标曲线.通过 P 点有 3 条不重合的坐标曲线,它们给出了点 P 的曲线坐标(x^1, x^2, x^3),如图 1-1 所示.

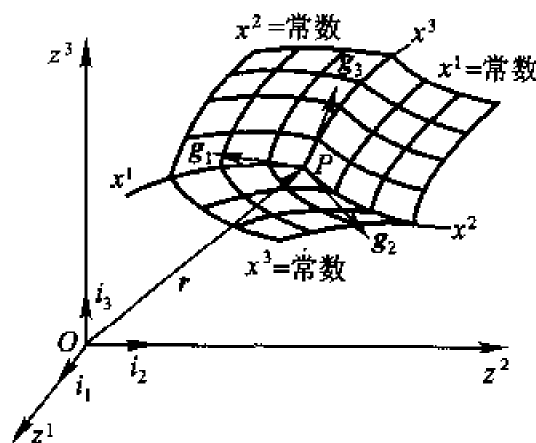


图 1-1

在曲线坐标系中,P 点的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 是曲线坐标(x^1, x^2, x^3)的函数.因为由图 1-1 及(1.3-2)式可知

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(z^1, z^2, z^3) &= \boldsymbol{r}[z^1(x^1, x^2, x^3), z^2(x^1, x^2, x^3), z^3(x^1, x^2, x^3)] \\ &= \boldsymbol{r}(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \tag{1.3-4}$$

处理弹性力学问题时,由于物体的几何形状,对有些问题采用直角坐

标系并不适合，而必须采用曲线坐标系．最常用的曲线坐标系是正交曲线坐标系，如圆柱坐标系、球坐标系、平面极坐标系等．

例 1 圆柱坐标系(图 1－2)

圆柱坐标 x^i 由它们同直角坐标 z^i 的关系来定义．

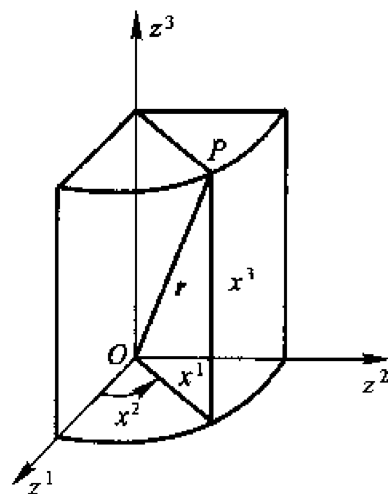


图 1－2

从几何关系可以写出

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 \cos x^2 \\ z^2 &= x^1 \sin x^2 \\ z^3 &= x^3 \end{aligned} \qquad (1.3-5)$$

雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \cos x^2 & -x^1 \sin x^2 & 0 \\ \sin x^2 & x^1 \cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^1$$

除在 z^3 轴上($x^1=0$)有 $J=0$ 外，(1.3－5)式在各处都有惟一的逆变换

$$\begin{aligned} x^1 &= \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2} \\ x^2 &= \arctan \frac{z_2}{z_1} \\ x^3 &= z^3 \end{aligned} \qquad (1.3-6)$$

对于圆柱坐标系，通常采用下面的坐标符号，

$$x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = z \qquad (1.3-7)$$

这样，圆柱坐标系的坐标面是 $r=$ 常数的圆柱面族，$\theta=$ 常数的半平面族，和 $z=$ 常数的平面族(图 1－2)．

张量分析的中心问题是研究坐标变换时张量分量的变换法则．因此张量分析必然涉及坐标变换，尤其是在讨论普遍张量时，必然涉及曲线坐标系之间的变换．

独立变量 x^1, x^2, x^3 的集合可以看作是在某个坐标系中规定一点 P 的坐标．将 x^1, x^2, x^3 通过以下的方程变换成一个新变量 $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$ 的集合

$$x^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, x^3) \quad (k=1,2,3) \qquad (1.3-8)$$

则上式规定了一个坐标变换．逆变换

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \quad (k=1,2,3) \qquad (1.3-9)$$

按相反的方向进行．为了保证这样一个变换是可逆的，并且在变量(x^1，

x^2, x^3)的某个区域 R 内是一一对应的,亦即在区域 R 中的每个有序数集(x^1, x^2, x^3)定义一个惟一的有序数集($\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3$),并且反之亦然,其充分条件是:函数 $\bar{x}^k(x^1, x^2, x^3)$ 在区域 R 中是单值、连续,有连续的一阶偏导数,雅可比行列式 $J=\left|\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j}\right|$ 在区域 R 内的任意点均不等于 0.

具有上述性质的坐标变换称为容许变换.本书以后论及的坐标变换都是容许变换.若雅可比行列式 $J=\left|\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j}\right|$ 处处为正,则一个右手坐标系变换为另一个右手坐标系.

§1.4 基 矢 量

在曲线坐标系中,空间一点 P 的位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 是曲线坐标 x^k 的函数[(1.3-4)式].若曲线坐标 x^k 有微小增量 $\mathrm{d}x^k$,则位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 有增量 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.由(1.3-4)式,位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k \tag{1.4-1}$$

空间一点 P 的位置矢量可用直角坐标表示为

$$\boldsymbol{r}=z^j \boldsymbol{i}_j \tag{1.4-2}$$

式中 $\boldsymbol{i}_j$ 为沿坐标轴 z^j 方向的单位矢量(图 1-1),也称为直角坐标系的基矢量.应用(1.3-2)式及(1.4-2)式,可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z^j}\frac{\partial z^j}{\partial x^k}=\frac{\partial z^j}{\partial x^k}\boldsymbol{i}_j \quad (k=1,2,3) \tag{1.4-3}$$

上式表明,$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}$ 是单位矢量 $\boldsymbol{i}_j$ 的线性组合,因此 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}$ 也是矢量.由(1.4-1)式可知,$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}$ 表征当 x^k 变化时位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的变化,因此 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}$ 的方向是沿坐标曲线 x^k 的切线方向.矢量 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}$ 可以取作曲线坐标系的基矢量,以 $\boldsymbol{g}_k$ 表示(图 1-1).这样,基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 的定义是

$$\boldsymbol{g}_k=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k}=\frac{\partial z^j}{\partial x^k}\boldsymbol{i}_j \quad (k=1,2,3) \tag{1.4-4}$$

由(1.4-1)式可得位置矢量的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}_k \mathrm{d}x^k \tag{1.4-5}$$

必须注意:在曲线坐标系中,对于空间的每一点,都有三个基矢量

$\boldsymbol{g}_k$. 基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 一般不是单位矢量，彼此也不正交；基矢量可以有量纲，但一点的三个基矢量的量纲可以不同；基矢量不是常矢量，它们的大小和方向依赖于它们所在点的坐标. 基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 线性无关，它们不共面，三个基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 构成了一个局部的参照标架（局部的斜角直线坐标）. 作用在一点的任意矢量，可以沿 $\boldsymbol{g}_k$ 的方向按平行四边形法则分解：

$$\boldsymbol{V} = v^k \boldsymbol{g}_k \tag{1.4-6}$$

若坐标系 x^k 变换成另一新坐标系 $\bar{x}^k$，

$$x^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, x^3) \quad (k = 1,2,3) \tag{1.4-7}$$

其逆变换为

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, x^2, x^3) \quad (k = 1,2,3)$$

则在新坐标系 $\bar{x}^k$ 中，基矢量 $\bar{\boldsymbol{g}}_k$ 为

$$\bar{\boldsymbol{g}}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} = \boldsymbol{g}_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \tag{1.4-8}$$

由此可知，若坐标系由 x^k 变换为 $\bar{x}^k$[(1.4-7)式]，则基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 按变换法则(1.4-8)式变换. 基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 也称为协变基矢量，这一点将在§1.6中说明.

§1.5 基本度量张量

对于任何坐标系，必须首先知道在该坐标系中如何度量长度. 设在曲线坐标系中有线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，由(1.4-5)式，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 与其自身的点积就是线元长度的平方. 即

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_k\mathrm{d}x^k\cdot\boldsymbol{g}_m\mathrm{d}x^m = \boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}_m\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^m$$

今定义

$$g_{km} = \boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}_m \tag{1.5-1}$$

则

$$\mathrm{d}s^2 = g_{km}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^m \tag{1.5-2}$$

函数 g_{km}(1.5-1)称为坐标系 x^k 的基本度量张量. 由此式可知，在三维空间，基本度量张量 g_{km} 有 9 个分量.

将(1.4-4)式代入(1.5-1)式，可得

$$g_{km} = \delta_{ij}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial z^j}{\partial x^m} \tag{1.5-3}$$

根据基本度量张量的定义[(1.5-1)式]，由标积的可交换性可知

$$g_{km} = g_{mk} \tag{1.5-4}$$

即基本度量张量 g_{km} 的指标 k 和 m 可以交换.

在§1.4中已指出,在曲线坐标系中,基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 不是单位矢量.由(1.5-1)可知,基矢量的大小可由基本度量张量表示为

$$|\boldsymbol{g}_k| = (\boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_k)^{1/2} = \sqrt{g_{\underline{kk}}} \tag{1.5-5}$$

上式中,$\underline{k}\,\underline{k}$表示对 k 不求和.书中以后出现这种符号,均与此同.

若坐标系 x^k 变换为另一个新坐标系 $\bar{x}^k$,变换方程为

$$\bar{x}^k = x^k(x^1, x^2, x^3) \quad (k = 1,2,3) \tag{1.5-6}$$

其逆变换为

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3) \quad (k = 1,2,3)$$

则

$$\mathrm{d}x^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\mathrm{d}\bar{x}^l \tag{1.5-7}$$

由(1.5-2)式,得

$$\mathrm{d}s^2 = g_{km}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n}\mathrm{d}\bar{x}^l\,\mathrm{d}\bar{x}^n \tag{1.5-8}$$

若定义

$$\bar{g}_{ln} = g_{km}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} \tag{1.5-9}$$

则(1.5-8)式可写成

$$\mathrm{d}s^2 = \bar{g}_{ln}\,\mathrm{d}\bar{x}^l\,\mathrm{d}\bar{x}^n \tag{1.5-10}$$

因(1.5-10)式与(1.5-2)式取同样的形式,$\bar{g}_{ln}$ 称为坐标系 $\bar{x}^l$ 的度量张量.

二次微分形式(1.5-2)式和(1.5-10)式极为重要,它定义了在一般曲线坐标系中线元长度的平方.

坐标变换时,一个量的分量的变换法则是该量的重要性质.由(1.5-9)式可知,若曲线坐标系 x^k 变换为另一个曲线坐标系 $\bar{x}^k$[(1.5-6)式],则度量张量 $g_{km}(x^k)$按(1.5-9)式所表示的特定的变换法则变换.

g_{km} 之所以称为度量张量,一方面是因为它度量空间线元长度的平方(所以称为"度量");另一方面是因为当坐标变换时,它按照(1.5-9)式这一特定的变换法则变换,这是张量的基本特性(所以它是张量),因此 g_{km} 称为度量张量.这是一个非常重要的基本张量,所以又称为基本度量张量.关于张量的基本特性,将在§1.8讨论.

由(1.5-1)式可以看出，在直角坐标系中 $g_{km}=\delta_{km}$，即在直角坐标系中，基本度量张量是常数.

基本度量张量描述空间的性质.如果有可能通过坐标变换引入一个坐标系，使得在该坐标系中 g_{ij} 等于常数，则这个空间是"欧几里得(Euclid)空间".如果不可能引入这样的坐标系，则是"非欧几里得空间".在§3.8中将进一步讨论这个问题.

§1.6 对偶基矢量、相伴度量张量

一、对偶基矢量

对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^k$ 由下面的方程式定义

$$\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}_s=\delta_s^r \tag{1.6-1}$$

由以上定义可以看出：在一般曲线坐标系中，对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^r$ 的方向与 $r\neq s$ 的诸基矢量 $\boldsymbol{g}_s$ 垂直；在三维空间中，$\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2,\boldsymbol{g}^3$ 分别垂直于 $\boldsymbol{g}_2$、$\boldsymbol{g}_3$，$\boldsymbol{g}_3$、$\boldsymbol{g}_1$ 及 $\boldsymbol{g}_1$、$\boldsymbol{g}_2$ 所在的平面.$\boldsymbol{g}^r$ 的大小满足 $\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}_s=1(r=s)$.

对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^r$ 作为一个矢量，可以沿基矢量 $\boldsymbol{g}_s$ 的方向分解为

$$\boldsymbol{g}^r=g^{rs}\boldsymbol{g}_s \tag{1.6-2}$$

式中 g^{rs} 是对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^r$ 在 $\boldsymbol{g}_s$ 方向的分量，共有9个.为求 g^{rs}，将(1.6-2)式两边点乘 $\boldsymbol{g}^s$，得

$$\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}^s=g^{rk}\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{g}^s=g^{rk}\delta_k^s=g^{rs}$$

即

$$g^{rs}=\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}^s \tag{1.6-3}$$

上式可作为 g^{rs} 的定义.该式与(1.5-1)式对应，因此，g^{rs} 称为相伴度量张量.由于矢量的点积适合交换律，由(1.6-3)式可知，g^{rs} 的指标 r,s 可以交换，即

$$g^{rs}=g^{sr} \tag{1.6-3a}$$

与基矢量 $\boldsymbol{g}_r$ 一样，对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^r$ 一般不是单位矢量，它的大小由下式计算：

$$|\boldsymbol{g}^r|=(\boldsymbol{g}^r\cdot\boldsymbol{g}^r)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{g^{rr}}\quad(r\text{ 不求和}) \tag{1.6-4}$$

一点的三个对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^r$ 构成一个局部的参照标架，作用在该点的任何矢量可以沿 $\boldsymbol{g}^r$ 的方向分解.对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^r$ 也称为逆变基矢量.

二、相伴度量张量

在讨论对偶基矢量过程中，引进了相伴度量张量 g^{rs}[(1.6－3)式]，它也称为共轭度量张量.

下面先讨论相伴度量张量与基本度量张量的关系.将(1.6－2)式代入(1.6－1)式，则

$$g^{rm}\boldsymbol{g}_m \cdot \boldsymbol{g}_s = \delta_s^r$$

即

$$g^{rm} g_{ms} = \delta_s^r \tag{1.6-5}$$

利用上式，可推导出计算 g^{rs} 的公式，对于一个固定的 r 值和 $s = 1,2,3$，上式给出以下三个分量方程：

$$g_{11} g^{r1} + g_{12} g^{r2} + g_{13} g^{r3} = \delta_1^r$$
$$g_{21} g^{r1} + g_{22} g^{r2} + g_{23} g^{r3} = \delta_2^r$$
$$g_{31} g^{r1} + g_{32} g^{r2} + g_{33} g^{r3} = \delta_3^r$$

若 g_{ms} 已知，则对于 $r = 1,2,3$，可以从上面的方程组解出 g^{rm}. 根据克拉默(Cramer)法则，可推导出计算 g^{rs} 的公式如下(更换了指标)，

$$g^{rs} = \frac{D^{rs}}{g} \tag{1.6-6}$$

式中

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \tag{1.6-7}$$

$D^{rs} = |g_{ij}|$ 中元素 g_{rs} 的代数余子式

在张量分析中，g^{rs} 的重要性和 g_{rs} 一样.

将(1.6－2)式左右两边均乘以 g_{rs}，即 $\boldsymbol{g}^r g_{rs} = g^{rm}\boldsymbol{g}_m g_{rs}$，则 $\boldsymbol{g}^r g_{rs} = \delta_s^m \boldsymbol{g}_m = \boldsymbol{g}_s$，更换指标，可得

$$\boldsymbol{g}_r = g_{rs}\boldsymbol{g}^s \tag{1.6-8}$$

(1.6－2)式和(1.6－8)式给出了基矢量和对偶基矢量之间极为重要的关系：

$$\boldsymbol{g}^r = g^{rs}\boldsymbol{g}_s \tag{1.6-2}$$

$$\boldsymbol{g}_r = g_{rs}\boldsymbol{g}^s \tag{1.6-8}$$

这表示基矢量 $\boldsymbol{g}_r$ 和对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^s$ 之间，通过度量张量和相伴度量张量，

可以提升或下降指标,使 g_r 和 g^s 互相变换.

三、矢量的逆变分量和协变分量

前面已经指出[见(1.4-6式)],任何一个矢量 V 可以用它沿基矢量 g_r 方向的分量表示,

$$V = v^r g_r \tag{1.6-9}$$

利用(1.6-8)式,则上式可表示为

$$V = v^r g_r = v_s g^s \tag{1.6-10}$$

式中

$$v_s = g_{rs} v^r \tag{1.6-11}$$

同样可得

$$v^r = g^{rs} v_s \tag{1.6-12}$$

(1.6-10)式表明矢量 V 也可以用它沿逆变基矢量 g^s 方向的分量表示. v^r 称为矢量 V 的逆变分量;$v^r g_r$ 是矢量 V 在协变基矢量 g_r 方向的分矢量;v_s 称为矢量 V 的协变分量,$v_s g^s$ 是矢量 V 在逆变基矢量 g^s 方向的分矢量.

将 g^s 点乘(1.6-9)式两边,将 g_r 点乘(1.6-10)式的左边和第二个等号的右边,可分别得到如下的两个重要关系式:

$$v^s = V \cdot g^s \tag{1.6-13}$$

$$v_r = V \cdot g_r \tag{1.6-14}$$

这表示矢量的逆变分量和协变分量的大小等于矢量和相应的基矢量的点积.利用这两个等式,则(1.6-9)式和(1.6-10)式的第二式可写成

$$V = (V \cdot g^r) g_r \tag{1.6-15}$$

$$V = (V \cdot g_s) g^s \tag{1.6-16}$$

在曲线坐标系中,g_r 和 g^r 不是常矢量,它们依赖于点的坐标.所以在曲线坐标系中,若用分量表示一个矢量[(1.6-10)式],则必须选择一个确定的点,即矢量的作用点,基矢量就取自这点,(图1-3)表示二维空间曲线坐标系的基矢量、对偶基矢量和任一矢量 V 的逆变分量和协变分量.

在直角坐标系中,g_r 和 g^r 的方向重合,因此,矢量的逆变分量和协变分量的差别消失.

由以上的讨论可以看出,v^r 和 v_r 是同一个矢量 V 分解为分量的两种不同的方式,或者说是同一矢量 V 的两种不同的张量表达方式.这是曲线坐标系的特点,必须很好地理解.

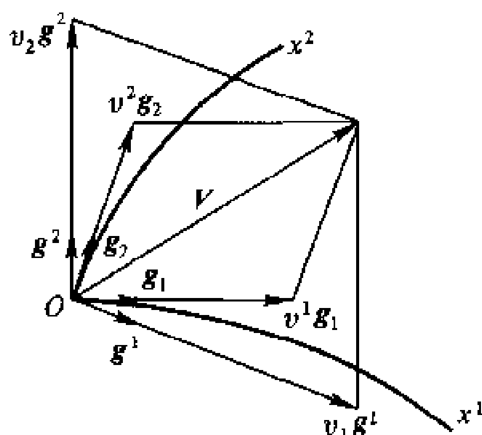


图 1-3

方程(1.6-12)式和(1.6-11)式建立了矢量分量的指标提升(由下标提升为上标,即由协变分量变换为逆变分量)和指标下降(由上标降为下标,即由逆变分量变换为协变分量)的方法.

四、对偶基矢量、相伴度量张量的变换法则

设坐标系 x^k 变换到另一个坐标系 $\bar{x}^k$,变换方程为

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, x^2, x^3) \quad (k = 1,2,3) \qquad (1.6-17)$$

则

$$d\bar{x}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} dx^l \qquad (1.6-18)$$

将(1.4-5)式两边点乘 $\bar{g}^k$,更换哑指标,可得

$$d\boldsymbol{r} \cdot \bar{\boldsymbol{g}}^k = (\boldsymbol{g}_l \cdot \bar{\boldsymbol{g}}^k) dx^l$$

应用(1.6-13)式,上式成为

$$d\bar{x}^k = (\boldsymbol{g}_l \cdot \bar{\boldsymbol{g}}^k) dx^l \qquad (1.6-19)$$

将(1.6-18)式与上式比较,可得

$$\boldsymbol{g}_l \cdot \bar{\boldsymbol{g}}^k = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}$$

$\bar{\boldsymbol{g}}^k$ 是个矢量,应用(1.6-16)式及上式,可得

$$\bar{\boldsymbol{g}}^k = (\bar{\boldsymbol{g}}^k \cdot \boldsymbol{g}_l) \boldsymbol{g}^l = \boldsymbol{g}^l \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \qquad (1.6-20)$$

这便是坐标按(1.6-17)式变换时,逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^k$ 的变换法则.

应用(1.6-3)式及(1.6-20)式,可推导出相伴度量张量在坐标变换(1.6-17)式时的变换法则:

$$\bar{g}^{km} = \bar{\boldsymbol{g}}^k \cdot \bar{\boldsymbol{g}}^m = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \boldsymbol{g}^l \cdot \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^n} \boldsymbol{g}^n = g^{ln} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^n} \qquad (1.6-21)$$

应当注意基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 的变换法则[(1.4－8)式]与对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^k$ 的变换法则[(1.6－20)式]的差别．当坐标系 x^k 变换到 $\bar{x}^k$[(1.6－17)式]时，基矢量的变换系数是$\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k}$[(1.4－8)式]，它被认为是正变换系数，因此基矢量也称为协变基矢量；而对偶基矢量的变换系数$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}$[(1.6－20)式]则被认为是逆变换系数，因此对偶基矢量也称为逆变基矢量．

同样应当注意基本度量张量 g_{km} 的变换法则[(1.5－9)式]和相伴度量张量 g^{km} 的变换法则[(1.6－21)式]的差别．

§1.7 正交曲线坐标系

一、正交曲线坐标系

若曲线坐标系的坐标曲线相互正交，则称为正交曲线坐标系．在正交曲线坐标系中，基矢量相互正交，但不一定是单位矢量，同一点的各基矢量可以有不同的量纲．对偶基矢量与基矢量的方向相同，但大小不相等．基本度量张量是

$$g_{ij}=\begin{cases}(H_i)^2 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \tag{1.7-1}$$

系数 H_i 称为拉梅(Lame)系数，或度量系数，或比例因子．由(1.6－7)式，在正交曲线坐标系中，

$$g=g_{11}g_{22}g_{33}=(H_1H_2H_3)^2 \tag{1.7-2}$$

相伴度量张量由以下关系式计算：

$$g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}}=\frac{1}{(H_i)^2}\quad (i\text{ 不求和}) \tag{1.7-3}$$

$$g^{ij}=0\quad (i\neq j) \tag{1.7-4}$$

对偶基矢量为

$$\boldsymbol{g}^k=g^{kk}\boldsymbol{g}_k\quad (k\text{ 不求和}) \tag{1.7-5}$$

在正交曲线坐标系中，常采用单位基矢量 $\boldsymbol{e}_i$

$$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{g}_i/|\boldsymbol{g}_i|=\boldsymbol{g}_i/H_i\quad (i\text{ 不求和}) \tag{1.7-6}$$

这样，在正交曲线坐标系中，采用单位基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 时，矢量的协变分量和逆变分量的差别消失．在弹性力学中最常用的正交曲线坐标系是圆柱坐标系、球坐标系和平面极坐标系．下面分别将它们的基矢量、基本度量张量、

相伴度量张量和对偶基矢量列出.

二、圆柱坐标系(图 1－4)

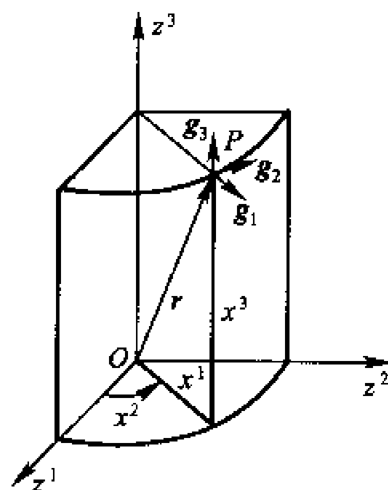


图 1－4

由 §1.3 例 1 得

$$z^1 = x^1 \cos x^2$$

$$z^2 = x^1 \sin x^2$$

$$z^3 = x^3$$

$$x^1 = \sqrt{(z^1)^2 + (z^2)^2}$$

$$x^2 = \arctan \frac{z^2}{z^1}$$

$$x^3 = z^3$$

基矢量: 由(1.4－4)式,得

$$\boldsymbol{g}_1 = (\cos x^2)\boldsymbol{i}_1 + (\sin x^2)\boldsymbol{i}_2 \qquad |\boldsymbol{g}_1| = 1$$

$$\boldsymbol{g}_2 = (-x^1 \sin x^2)\boldsymbol{i}_1 + (x^1 \cos x^2)\boldsymbol{i}_2 \qquad |\boldsymbol{g}_2| = x^1$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{i}_3 \qquad |\boldsymbol{g}_3| = 1$$

(1.7－7)

基本度量张量: 由(1.5－3)式得

$$g_{11} = \left(\frac{\partial z^1}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^2}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^3}{\partial x^1}\right)^2$$

$$= (\cos x^2)^2 + (\sin x^2)^2 = 1$$

$$g_{22} = \left(\frac{\partial z^1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^3}{\partial x^2}\right)^2$$

$$= (\quad x^1 \sin x^2)^2 + (x^1 \cos x^2)^2 = (x^1)^2$$

$$g_{33} = \left(\frac{\partial z^1}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^2}{\partial x^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z^3}{\partial x^3}\right)^2 = 1 \qquad (1.7-8)$$

$$g_{12} = g_{23} = g_{13} = 0$$

$$g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x^1)^2 \qquad (1.7-9)$$

相伴度量张量: 由(1.6－6)式得

$$g^{11} = 1, \quad g^{22} = 1/(x^1)^2, \quad g^{33} = 1 \qquad (1.7-10)$$

$$g^{12} = g^{23} = g^{31} = 0$$

对偶基矢量： 由(1.6-2)式得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}^1=\boldsymbol{g}_1, && |\boldsymbol{g}^1|=1\\
&\boldsymbol{g}^2=\boldsymbol{g}_2/(x^1)^2, && |\boldsymbol{g}^2|=1/x^1\\
&\boldsymbol{g}^3=\boldsymbol{g}_3=\boldsymbol{i}_3, && |\boldsymbol{g}^3|=1
\end{aligned}
\tag{1.7-11}
$$

三、球坐标系(图 1-5)

$$
\begin{aligned}
z^1&=x^1\sin x^2\cos x^3\\
z^2&=x^1\sin x^2\sin x^3\\
z^3&=x^1\cos x^2
\end{aligned}
\tag{1.7-12}
$$

$$
\begin{aligned}
x^1&=\sqrt{(z^1)^2+(z^2)^2+(z^3)^2}\\
x^2&=\arccos\frac{z^3}{\sqrt{(z^1)^2+(z^2)^2+(z^3)^2}}\\
x^3&=\arctan\frac{z^2}{z^1}
\end{aligned}
\tag{1.7-13}
$$

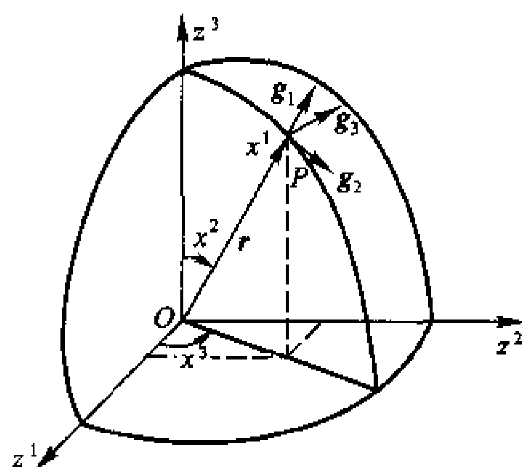


图 1-5

基矢量： 由(1.4-4)式得

$$
\left.
\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_1=(\sin x^2\cos x^3)\boldsymbol{i}_1+(\sin x^2\sin x^3)\boldsymbol{i}_2+(\cos x^2)\boldsymbol{i}_3,\\
&\qquad |\boldsymbol{g}_1|=1\\
&\boldsymbol{g}_2=(x^1\cos x^2\cos x^3)\boldsymbol{i}_1+(x^1\cos x^2\sin x^3)\boldsymbol{i}_2+(-x^1\sin x^2)\boldsymbol{i}_3,\\
&\qquad |\boldsymbol{g}_2|=x^1\\
&\boldsymbol{g}_3=(-x^1\sin x^2\sin x^3)\boldsymbol{i}_1+(x^1\sin x^2\cos x^3)\boldsymbol{i}_2,\\
&\qquad |\boldsymbol{g}_3|=x^1\sin x^2
\end{aligned}
\right\}
\tag{1.7-14}
$$

基本度量张量： 由(1.5-3)式得

$$\left.\begin{aligned}g_{11}&=(\sin x^2\cos x^3)^2+(\sin x^2\sin x^3)^2+(\cos x^2)^2\\&=1\\g_{22}&=(x^1\cos x^2\cos x^3)^2+(x^1\cos x^2\sin x^3)^2+(-x^1\sin x^2)^2\\&=(x^1)^2\\g_{33}&=(-x^1\sin x^2\sin x^3)^2+(x^1\sin x^2\cos x^3)^2\\&=(x^1\sin x^2)^2\\g_{12}&=g_{23}=g_{31}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.7-15}$$

$$g=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&(x^1)^2&0\\0&0&(x^1\sin x^2)^2\end{vmatrix}=(x^1)^4(\sin x^2)^2\tag{1.7-16}$$

相伴度量张量： 由(1.6-6)式得

$$\left.\begin{aligned}&g^{11}=1,\ g^{22}=1/(x^1)^2,\ g^{33}=\frac{1}{(x^1\sin x^2)^2}\\&g^{12}=g^{13}=g^{23}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.7-17}$$

对偶基矢量： 由(1.6-2)式得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{g}^1=\boldsymbol{g}_1, && |\boldsymbol{g}^1|=1\\&\boldsymbol{g}^2=\boldsymbol{g}_2/(x^1)^2, && |\boldsymbol{g}^2|=1/x^1\\&\boldsymbol{g}^3=\boldsymbol{g}_3/(x^1\sin x^2)^2, && |\boldsymbol{g}^3|=1/(x^1\sin x^2)\end{aligned}\right\}\tag{1.7-18}$$

§1.8 张 量

一、标量、逆变矢量、协变矢量

在物理量或几何量中，有一些量与参考坐标无关，例如质量、温度、长度等；另有一些量，它们的分量却与参考坐标的选择有关，例如位移、速度等. 前者称为标量，后者称为矢量. 在数学上，按照坐标作容许变换时，这些量的分量所服从的变换法则的不同，而分别给以定义.

设一个量的分量在曲线坐标系 x^i 中定义，它们是坐标 x^1,x^2,x^3 的函数. 若坐标系 x^i 作容许变换成另一新坐标系 $\bar{x}^i$，$\bar{x}^i=\bar{x}^i(x^1,x^2,x^3)$，则可以定义该量在新坐标系 $\bar{x}^i$ 中的分量，并根据该量的分量在坐标变换

时所遵循的不同的变换法则，给予该量以不同的名称. 下面定义：

(1) 标量

一个量被称为标量或绝对标量，若它在坐标系 x^i 中只有一个分量 ϕ，在新坐标系 $\bar{x}^i$ 中也只有一个分量 $\bar{\phi}$，并且在两个坐标系中的对应点上，ϕ 与 $\bar{\phi}$ 的数值相等，即

$$\phi[x^1(\bar{x}^i),x^2(\bar{x}^i),x^3(\bar{x}^i)]\equiv\bar{\phi}(\bar{x}^1,\bar{x}^2,\bar{x}^3)=\phi(x^1,x^2,x^3) \tag{1.8-1}$$

标量也被称为 0 阶张量.

(2) 逆变矢量(一阶逆变张量)

一个量被称为逆变矢量或一阶逆变张量，若它在坐标系 x^i 中有三个分量 A^i，在坐标系 $\bar{x}^i$ 中有三个分量 $\bar{A}^i$，它们满足以下的变换法则：

$$\bar{A}^i(\bar{x})=A^k(x)\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k} \tag{1.8-2}$$

逆变矢量用上标表示，因此上标也称为逆变指标.

坐标的微分 $\mathrm{d}x^i$ 是逆变矢量的一个典型. 因为按照微分的链式法则，在新坐标系中，微分 $\mathrm{d}\bar{x}^i$ 可按下式计算

$$\mathrm{d}\bar{x}^i=\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k \tag{1.8-3}$$

可见在坐标变换时，坐标微分 $\mathrm{d}x^i$ 按(1.8-2)式定义的逆变矢量的变换法则变换.

(3) 协变矢量(一阶协变张量)

一个量被称为协变矢量或一阶协变张量，若它在坐标系 x^i 中有三个分量 A_i，在坐标系 $\bar{x}^i$ 中有三个分量 $\bar{A}_i$，并且这些分量满足以下的变换法则：

$$\bar{A}_i(\bar{x})=A_k(x)\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i} \tag{1.8-4}$$

协变矢量用下标表示，因此，下标也称为协变指标.

标量 ϕ 的偏导数是协变矢量的例子. 因为在新坐标系 $\bar{x}^i$ 中，标量 ϕ 的偏导数为

$$\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^i}=\frac{\partial\phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i} \tag{1.8-5}$$

可见 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$ 在坐标变换时，按(1.8-4)式定义的协变矢量的变换法则变换.

协变矢量的变换法则[(1.8-4)式]与基矢量的变换法则[(1.4-8)式]相同，变换系数都是正变换系数，所以称为“协变”. 逆变矢量的变换法

则[(1.8－2)式]与对偶基矢量的变换法则[(1.6－20)式]相同，变换系数都是逆变换系数，所以称为"逆变"。由此可见，上标和下标各有其特定的意义.

必须注意，矢量就是矢量，在坐标变换时，矢量本身是不变量. 但是矢量的分量并不是不变量，当坐标变换时，矢量的分量按特定的变换法则变换. 逆变矢量 A^i 和协变矢量 A_i 并不是两个不同的矢量，而是对同一矢量 $\boldsymbol{A}$ 的两种不同的描述方式；逆变矢量 A^i 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的逆变分量，协变矢量 A_i 是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的协变分量.

二、二阶张量

像三维空间坐标系的度量张量 g_{ij} 这样的量，它有 9 个分量. 当坐标系 x^i 变换为 $\bar{x}^i$ 时，这些分量按特定的法则[(1.5－9)式]变换. 类似这样的量，按照在坐标变换时它们所遵循的变换法则进行定义，并给予不同的名称. 下面定义：

(1) 二阶逆变张量 A^{ij}

$$\bar{A}^{ij}(\bar{x}) = A^{mn}(x)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \tag{1.8-6}$$

(2) 二阶协变张量 A_{ij}

$$\bar{A}_{ij}(\bar{x}) = A_{mn}(x)\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \tag{1.8-7}$$

(3) 二阶混合张量 $A^i_{\cdot j}, A_i^{\cdot j}$

$$\bar{A}^i_{\cdot j}(\bar{x}) = A^m_{\cdot n}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j}$$

或

$$\left.\bar{A}_i^{\cdot j}(\bar{x}) = A_m^{\cdot n}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n}\right\} \tag{1.8-8}$$

三、高阶张量

上面关于二阶张量的定义，可以推广到高阶张量. 一个量 $A^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ 被称为是 p 阶逆变、q 阶协变的 r 阶($r = p + q$)张量，若在坐标变换时，它的分量按下式变换：

$$\bar{A}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{m_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}A^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{m_1 m_2 \cdots m_q} \tag{1.8-9}$$

必须注意，指标的前后顺序不能随意调换，在指标的空位处应当用小圆点标志，如(1.8－8)式. (1.8－9)式中，为了印刷方便，略去了标志指标前后

位置的小圆点.

四、张量的特性

张量是矢量概念的推广.根据以上关于张量的解析定义,现将张量的特性加以综述.

张量由它的分量的集合所规定.

张量的基本性质由坐标变换时张量的分量所遵循的变换法则来确定,变换法则与张量表示什么物理量无关.

张量的变换法则——(1.8-1)、(1.8-2)、(1.8-4)、(1.8-6)~(1.8-9)式表明坐标系作容许变换时,张量在新坐标系 $\bar{x}^i$ 中的每一个分量是该张量在旧坐标系 x^i 中全部分量的线性组合,变换系数是齐次的.根据张量的变换法则的不同来定义张量的“阶”与“变异”(“结构”).

张量可分为零阶、一阶、二阶、…….张量的阶等于变换法则中变换系数的维度,也等于张量的指标的数目.在三维空间中,r 阶张量的分量总数为

$$N = 3^r \tag{1.8-10}$$

标量是零阶张量,矢量是一阶张量.

按照张量的变异(结构),张量可分为逆变、协变和混合张量,这由变换法则中的变换系数是逆变换系数$\dfrac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}$、正变换系数$\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}$或兼有二者来区别.张量的变异也由张量的指标的位置(上标、下标或兼有上标下标)来区别.

如果在一个坐标系中,某个张量的全部分量等于0,则在通过容许变换的其他任何坐标系中,该张量的全部分量也等于0,这是张量的最重要的特性.张量的这个特性,使张量方程具有不变性,这在后面将进一步论述.

§1.9 几个重要的特殊张量

若定义§1.2中的克罗内克符号和置换符号分别是直角坐标系 z^i 中的2阶和3阶张量,并且根据它们的指标位置分别是协变、逆变或混合张量:

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta^i_j = \delta^j_i = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = j \\ 0 & \text{当 } i \neq j \end{cases} \tag{1.9-1}$$

$$e_{ijk}=e^{ijk}=\begin{cases}1 & \text{当 } ijk \text{ 是 123 的偶置换}\\ -1 & \text{当 } ijk \text{ 是 123 的奇置换}\\ 0 & \text{当 } ijk \text{ 的任意两个指标相同}\end{cases} \tag{1.9-2}$$

那么,在曲线坐标系 x^i 中,它们的分量是什么?这可以根据张量的变换法则写出.

一、克罗内克符号的变换

$$g_{ij}=\frac{\partial z^m}{\partial x^i}\frac{\partial z^n}{\partial x^j}\delta_{mn} \tag{1.9-3}$$

$$g^{ij}=\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial x^j}{\partial z^n}\delta^{mn} \tag{1.9-4}$$

$$g_j^i=\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial z^n}{\partial x^j}\delta_n^m=\frac{\partial x^i}{\partial z^m}\frac{\partial z^m}{\partial x^j}=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta_j^i \tag{1.9-5}$$

(1.9-3)式很容易理解,因为它与(1.5-3)式一致.在(1.9-4)式中,$\delta^{mn}=\boldsymbol{i}^m\cdot\boldsymbol{i}^n$,即直角坐标系的对偶基矢量的点积,变换到曲线坐标系后,它们应是 $\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}^j$,根据(1.6-3)式,这个点积是 g^{ij}.将(1.9-4)式与(1.6-21)式比较,则(1.9-4)式也容易理解.同样,对于(1.9-5)式,$\delta_n^m=\boldsymbol{i}^m\cdot\boldsymbol{i}_n$,因此变换后应是 $\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j$,即 g_j^i.由此可知,当直角坐标系变换为曲线坐标系时,克罗内克符号变换为度量张量;混合张量 g_j^i 恒等于 δ_j^i,它在所有的坐标系中都是常数.

二、置换张量

$$\in_{ijk}=\frac{\partial z^r}{\partial x^i}\frac{\partial z^s}{\partial x^j}\frac{\partial z^t}{\partial x^k}e_{rst}=e_{ijk}\left|\frac{\partial z^m}{\partial x^n}\right|=e_{ijk}\sqrt{g} \tag{1.9-6}$$

$$\in^{ijk}=\frac{\partial x^i}{\partial z^r}\frac{\partial x^j}{\partial z^s}\frac{\partial x^k}{\partial z^t}e^{rst}=e^{ijk}\left|\frac{\partial x^m}{\partial z^n}\right|=e^{ijk}\frac{1}{\sqrt{g}} \tag{1.9-7}$$

这两个变换式的中间的等号是引用了行列式的展开公式(1.2-9c)和(1.2-9d).最后的等式是需要证明的.

由(1.6-5)式得

$$g_{im}g^{mj}=\delta_i^j$$

由行列式的乘法可知

$$|g_{im}g^{mj}|=|g_{ij}|\cdot|g^{ij}|=|\delta_i^j|=1 \tag{1.9-8}$$

由 g_{ij} 和 g^{ij} 的表达式(1.9-3)、(1.9-4)式并应用行列式的乘法,可得

$$|g_{ij}| = \left|\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right| \cdot \left|\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\right| = \left|\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right|^2 \qquad (1.9-9)$$

$$|g^{ij}| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right| \cdot \left|\frac{\partial x^j}{\partial z^i}\right| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right|^2 \qquad (1.9-10)$$

由(1.6－7)式得 $g=|g_{ij}|$. 由§1.3 可知，对于容许变换 $\left|\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right|\neq 0$；对于右手坐标系，$\left|\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right|>0$，因此

$$\left|\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right| = \sqrt{g} \qquad (1.9-11)$$

$$\left|\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right| = (|g^{ij}|)^{1/2} = \frac{1}{(|g_{ij}|)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \qquad (1.9-12)$$

这样，(1.9－6)、(1.9－7)式得到了证明.

由此可知：若直角坐标系变换为曲线坐标系，则置换符号 e_{ijk}、e^{ijk}（直角坐标系中的张量）变换为 $\in_{ijk}$、$\in^{ijk}$，称为置换张量. 由(1.2－8)式及(1.9－6)式可知

$$\in_{ijk} = \begin{cases} +\sqrt{g} & \text{当 } ijk=123、231、312 \\ -\sqrt{g} & \text{当 } ijk=321、213、132 \\ 0 & \text{当 } ijk \text{ 中任意二个指标相同} \end{cases} \qquad (1.9-13)$$

与此相似，由(1.2－8)式及(1.9－7)式可知 $\in^{ijk}$ 相应的值分别为 $+\frac{1}{\sqrt{g}}$、$-\frac{1}{\sqrt{g}}$ 或 0.

三、置换张量与克罗内克符号的关系

$\in_{ijk}$、$\in^{ijk}$ 具有普遍张量的性质，把§1.2 中用 e_{ijk}、e^{ijk} 表示的式子转换成用 $\in_{ijk}$、$\in^{ijk}$ 表示[利用(1.9－6)、(1.9－7)式]，则这些表示式便变换成在各种坐标系中普遍适用的张量方程. 由(1.2－9b)式可得

$$a \in_{lmn} = \in_{rst} a_l^r a_m^s a_n^t \qquad (1.9-14)$$

与上式类似，

$$a \in^{rst} = \in^{lmn} a_l^r a_m^s a_n^t \qquad (1.9-15)$$

由(1.9－6)、(1.9－7)式可得

$$e^{rst} e_{lmn} = \in^{rst} \in_{lmn} \qquad (1.9-16)$$

将上式代入(1.2-10)~(1.2-13)式,可得以下的$\in$-δ关系式:

$$\in^{rst}\in_{lmn}=\delta_l^r\delta_m^s\delta_n^t-\delta_l^r\delta_n^s\delta_m^t+\delta_n^r\delta_l^s\delta_m^t-\delta_n^r\delta_m^s\delta_l^t+\delta_m^r\delta_n^s\delta_l^t-\delta_m^r\delta_l^s\delta_n^t \tag{1.9-17}$$

$$\in^{rst}\in_{rmn}=\delta_m^s\delta_n^t-\delta_n^s\delta_m^t \tag{1.9-18}$$

$$\in^{rst}\in_{rsn}=2\delta_n^t \tag{1.9-19}$$

$$\in^{rst}\in_{rst}=6 \tag{1.9-20}$$

(1.2-14)式变换成

$$a\in_{lmn}\in^{lmn}=6a=a_l^r a_m^s a_n^t\in_{rst}\in^{lmn} \tag{1.9-21}$$

四、二维空间的置换张量

弹性力学中,很多问题是二维的.如平面应力、平面应变问题,它们由平面坐标 x^1,x^2 来描述.在薄壳理论中,需用曲面上的二维坐标 x^1,x^2 来描述.对任何二维空间,可以看作是一般三维空间的子空间,即在二维坐标 x^α 之外,加上第三个坐标 x^3,并使第三个坐标的基矢量 $\boldsymbol{g}_3$ 等于单位矢量 $\boldsymbol{i}_3$,其方向垂直于基矢量 $\boldsymbol{g}_\alpha$.这样,$g_{\alpha3}=\boldsymbol{g}_\alpha\cdot\boldsymbol{g}_3=0$,$g_{33}=1$,基本度量张量的行列式为

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \tag{1.9-22}$$

在置换张量的每个不为零的分量$\in_{ijk}$中,下标之一必须是3.通过循环置换,总可以使指标 $k=3$,于是 i,j 的范围就限制在1,2中.这样,可以引入一个二维置换张量$\in_{\alpha\beta}$

$$\in_{ij3}=\in_{\alpha\beta3}=\in_{\alpha\beta} \tag{1.9-23}$$

由上式得

$$\in_{11}=\in_{22}=0,\quad \in_{12}=\sqrt{g}=-\in_{21} \tag{1.9-24}$$

逆变分量是

$$\in^{ij3}=\in^{\alpha\beta3}=\in^{\alpha\beta} \tag{1.9-25}$$

由上式得

$$\in^{11}=\in^{22}=0,\quad \in^{12}=\frac{1}{\sqrt{g}}=-\in^{21} \tag{1.9-26}$$

和前面用$\in_{ijk}$、$\in^{ijk}$展开三阶行列式一样,可用$\in_{\alpha\beta}$、$\in^{\alpha\beta}$展开二阶行列式.有关公式列出如下,读者可自己证明.对于二阶行列式

$$a = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}$$

下列各公式成立：

$$a \in_{\gamma\delta} = a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta \in_{\alpha\beta} \tag{1.9-27}$$

$$a \in^{\alpha\beta} = a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta \in^{\gamma\delta} \tag{1.9-28}$$

$$2a = a_\gamma^\alpha a_\delta^\beta \in_{\alpha\beta} \in^{\gamma\delta} \tag{1.9-29}$$

置换张量的积为

$$\in^{\alpha\beta} \in_{\gamma\delta} = \delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta - \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta \tag{1.9-30}$$

$$\in^{\alpha\beta} \in_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta \tag{1.9-31}$$

$$\in^{\alpha\beta} \in_{\alpha\beta} = 2 \tag{1.9-32}$$

§1.10 笛卡儿张量

前已着重指出，在曲线坐标系中，必须很好地理解逆变张量与协变张量的意义以及它们的变换法则的区别．但是如果所讨论的问题采用直角坐标描述，则张量的逆变与协变的区别消失．为加以说明，设 z^1、z^2、z^3 和 $\bar{z}^1$、$\bar{z}^2$、$\bar{z}^3$ 是两个直角坐标系，它们之间的变换方程为

$$\bar{z}^{i'} = \alpha_j^{i'} z^j + a^{i'} \tag{1.10-1}$$

式中 $a^{i'}$ 为常数，$\alpha_j^{i'}$ 是沿坐标轴 $\bar{z}^{i'}$ 与 z^j 方向的单位矢量间夹角的方向余弦，即

$$\alpha_j^{i'} = \cos(\bar{z}^{i'}, z^j) \tag{1.10-2}$$

例如 $\alpha_1^{2'} = \cos(\bar{z}^{2'}, z^1)$．(1.10-1)式的逆变换方程为

$$z^i = \beta_{j'}^i \bar{z}^{j'} + b^i \tag{1.10-3}$$

式中

$$\beta_{j'}^i = \cos(z^i, \bar{z}^{j'}) \tag{1.10-4}$$

由(1.10-2)、(1.10-4)式可以看出

$$\alpha_j^{i'} = \beta_{i'}^j \tag{1.10-5}$$

这样

$$\frac{\partial z^k}{\partial \bar{z}^{i'}} = \beta_{i'}^k = \alpha_k^{i'} = \frac{\partial \bar{z}^{i'}}{\partial z^k} \tag{1.10-6}$$

因此，§1.8 中同阶逆变张量和协变张量的变换法则的区别消失．

可见，若所讨论的问题仅限于直角坐标系，则可以把所有张量的指标

写成下标.此张量称为笛卡儿(Cartesian)张量或直角坐标张量.

在近代许多弹性力学、连续介质力学的书籍中,采用笛卡儿张量作为书写方程的一种方便的、简洁的方式,也称为下标记号法.

§1.11 矢量乘积的张量表示

本节讨论用张量形式表达曲线坐标系中矢量的乘积.

一、矢量的标量积

应用(1.6-10)式,两个矢量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 的标量积可表示为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(u^i\boldsymbol{g}_i)\cdot(v_j\boldsymbol{g}^j)=u^iv_j\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}^j=u^iv_j\delta_i^j=u^iv_i \tag{1.11-1}$$

这个形式与直角坐标系中矢量的标量积的形式($\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$)[①]是相似的.当然,$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ 也可表示为

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=u_jv^j=u_iv_jg^{ij}=u^iv^jg_{ij} \tag{1.11-2}$$

二、矢量的矢量积

先讨论基矢量的矢量积,在直角坐标系中,单位基矢量 $\boldsymbol{i}_1$、$\boldsymbol{i}_2$、$\boldsymbol{i}_3$中任意两个的矢量积为

$$\boldsymbol{i}_i\times\boldsymbol{i}_j=e_{ijk}\boldsymbol{i}_k\qquad(i,j,k=1,2,3) \tag{1.11-3}$$

式中 i,j,k 是1,2,3的循环排列.在直角坐标系中,$\boldsymbol{g}_i$ 或 $\boldsymbol{g}^k$ 就是单位基矢量 $\boldsymbol{i}_i$ 或 $\boldsymbol{i}^k$.若把上式中的基矢量写成 $\boldsymbol{g}_i$ 或 $\boldsymbol{g}^k$,则上式可写成

$$\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j=e_{ijk}\boldsymbol{g}^k$$

在直角坐标系中,$e_{ijk}=\in_{ijk}$.这样,上式可写成

$$\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j=\in_{ijk}\boldsymbol{g}^k \tag{1.11-4}$$

这个方程是用普遍张量形式表示的,它不仅在直角坐标系中成立,在其他坐标系中也成立.(这是张量方程的最重要的性质,本书在以后将对此加以论证.)如果基矢量按 $\boldsymbol{g}_1$,$\boldsymbol{g}_2$,$\boldsymbol{g}_3$的次序组成右手系参照标架,则(1.11-4)式中 $\boldsymbol{g}_i$、$\boldsymbol{g}_j$ 和 $\boldsymbol{g}_i\times\boldsymbol{g}_j$ 这三者也组成右手系.和(1.11-4)式相似,

$$\boldsymbol{g}^i\times\boldsymbol{g}^j=\in^{ijk}\boldsymbol{g}_k \tag{1.11-5}$$

---

① 参见樊映川等编,《高等数学讲义》,上册,第二版,人民教育出版社,1964年.

上式也是普遍成立的.

现讨论任意两个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的矢量积.

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A^i\boldsymbol{g}_i)\times(B^j\boldsymbol{g}_j)=A^iB^j\in_{ijk}\boldsymbol{g}^k=C_k\boldsymbol{g}^k \tag{1.11-6}$$

式中

$$C_k=A^iB^j\in_{ijk} \tag{1.11-7}$$

或

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=A_i\boldsymbol{g}^i\times B_j\boldsymbol{g}^j=A_iB_j\in^{ijk}\boldsymbol{g}_k=C^k\boldsymbol{g}_k \tag{1.11-8}$$

式中

$$C^k=A_iB_j\in^{ijk} \tag{1.11-9}$$

乘积 $\boldsymbol{C}$ 的方向与因子 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 垂直.这可由 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的标量积等于 0 来证明:

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}=C_kA^k=A^iB^j\in_{ijk}A^k=A^iB^jA^ke_{ijk}\sqrt{g} \tag{1.11-10}$$

上式是分别以矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的分量为行的行列式的展开式[见(1.2-9a 式)].由于这个行列式中有两行相等,都是矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分量,因此这个行列式等于 0.由此证明 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 正交.同样可证明 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 正交.这样,$\boldsymbol{C}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 所在的面,矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 组成右手系,如图 1-6 所示.矢量积 $\boldsymbol{C}(=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$的大小等于以矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的面积.这在矢量代数中有证明,这里不重复.

矢量积的一个应用是表示面元.以矢元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 为邻边的平行四边形面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$(图 1-7)为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}r^i\mathrm{d}s^j\in_{ijk}\boldsymbol{g}^k \tag{1.11-11}$$

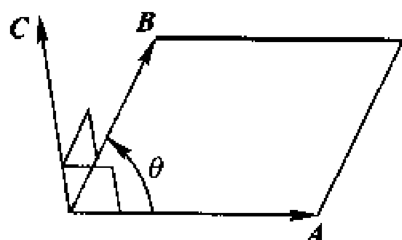


图 1-6

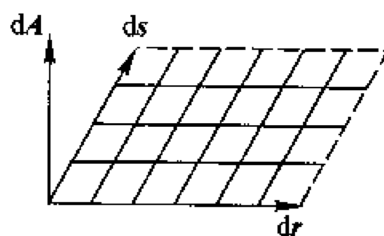


图 1-7

或

$$\mathrm{d}A_k=\mathrm{d}r^i\mathrm{d}s^j\in_{ijk} \tag{1.11-12}$$

这样,以 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的邻边的平行四边形面元的大小和方向由矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 表示.

矢量积的另一个应用是表示力矩.作用在 P 点的力 $\boldsymbol{F}$ 对于另一点 O

的力矩等于力的作用点 P 的矢径 $\boldsymbol{r}$（$=OP$）与力矢量 $\boldsymbol{F}$ 的矢量积. 矢径的始点和矩心重合（图 1-8），力矩为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=r^iF^j\in_{ijk}\boldsymbol{g}^k \tag{1.11-13}$$

或

$$M_k=r^iF^j\in_{ijk} \tag{1.11-14}$$

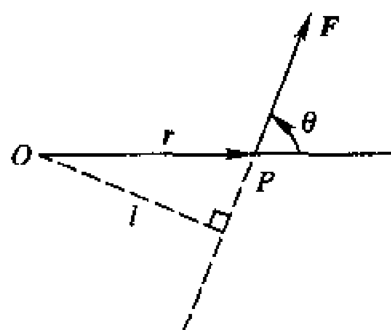


图 1-8

三、矢量的混合积

矢量的混合积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 可用下式计算：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=A^iB^j\in_{ijk}\boldsymbol{g}^k\cdot C^l\boldsymbol{g}_l=A^iB^jC^l\in_{ijk}\delta_l^k=A^iB^jC^k\in_{ijk} \tag{1.11-15}$$

矢量的混合积是个标量. 由点积的定义和图 1-9 有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{C}|\cos\beta$$

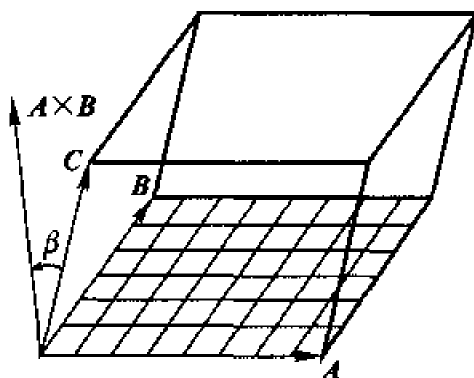


图 1-9

上式是以矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 为棱的平行六面体（图 1-9）的体积 V，因此，可以写成以下的形式：

$$V=A^iB^jC^k\in_{ijk}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.11-16}$$

当交换乘积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 中的任何两个因子时，必须交换 $\in_{ijk}$ 中相应的下标，例如

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}=A^iC^kB^j\in_{ikj}=-A^iB^jC^k\in_{ijk}=-V$$

由此可知，循环交换各因子，其结果不变，而各因子的逆循环置换则产生相反的符号.

应用矢量的混合积，可以计算以基矢量为棱的平行六面体的体积. 由(1.11-4)式及(1.9-13)式得

$$\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2 = \in_{123} \boldsymbol{g}^3 = \sqrt{g}\, \boldsymbol{g}^3$$

这样,可得

$$\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_3 = \sqrt{g}\, \boldsymbol{g}^3 \cdot \boldsymbol{g}_3 = \sqrt{g} \qquad (1.11-17)$$

上式表明$\sqrt{g}$等于以协变基矢量为棱的平行六面体的体积.与此类似,由(1.11－5)式及(1.9－13)式可得

$$\boldsymbol{g}^1 \times \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}^3 = \in^{123} \boldsymbol{g}_3 \cdot \boldsymbol{g}^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \qquad (1.11-18)$$

应用矢量的混合积可以表示体元.以矢元 d$\boldsymbol{r}$、d$\boldsymbol{s}$、d$\boldsymbol{t}$ 为棱的体元,按(1.11－16)式可写成

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{t} = \mathrm{d}r^i \mathrm{d}s^j \mathrm{d}t^k \in_{ijk} \qquad (1.11-19)$$

该体元如图 1－10 所示.

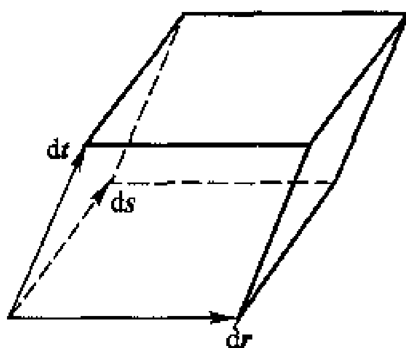


图 1 10

例 1 用张量表示式证明:

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}.$$

证明

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A} \times (B^j \boldsymbol{g}_j \times C^k \boldsymbol{g}_k) \\
&= \boldsymbol{A} \times (B^j C^k \in_{jkl} \boldsymbol{g}^l) \\
&= A_i \boldsymbol{g}^i \times (B^j C^k \in_{jkl} \boldsymbol{g}^l) \\
&= A_i B^j C^k \in_{jkl} \boldsymbol{g}^i \times \boldsymbol{g}^l = A_i B^j C^k \in_{jkl} \in^{ilm} \boldsymbol{g}_m \\
&= A_i B^j C^k (\delta_j^m \delta_k^i - \delta_j^i \delta_k^m) \boldsymbol{g}_m \\
&= A_k C^k B^m \boldsymbol{g}_m - A_j B^j C^m \boldsymbol{g}_m \\
&= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \qquad (1.11-20)
\end{aligned}$$

证明中引用了(1.9－18)式,$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$称为三矢量的三重矢量积.

习 题

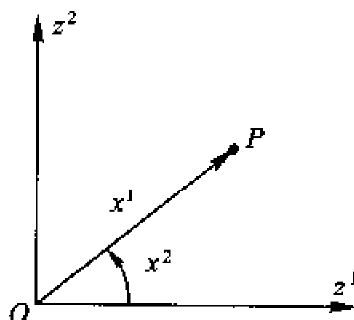
1. 验证下列各式：

(a) $\delta_j^i\delta_i^j=3$ (b) $e_{ijk}e^{ijk}=6$

(c) $e_{ijk}A^jA^k=0$ (d) $\delta_j^i\delta_k^j=\delta_k^i$

(e) $e^{rst}e_{rmn}=\delta_m^s\delta_n^t-\delta_n^s\delta_m^t$

2. 计算平面极坐标系的基矢量、基本度量张量、对偶基矢量，相伴度量张量，平面极坐标的分量为 $x^1=r, x^2=\theta$.（题1.2图）



题1.2图

3. 验证球坐标系（$x^1=r, x^2=\varphi, x^3=\theta$）（图1-5）的基矢量、基本度量张量、对偶基矢量、相伴度量张量的表示式（1.7-14）~（1.7-18）.

4. 验证线元（dx^1, 0, 0）的长度是 $\sqrt{g_{11}}\,|dx^1|$，线元（0, dx^2, 0）的长度是 $\sqrt{g_{22}}\,|dx^2|$.

5. 线元（dx^1,0,0）与线元（0,dx^2,0）之间的夹角为 θ_{12}，证明：

$$\cos\theta_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}$$

提示：先计算线元在直角坐标系的分量，然后运用在直角坐标系中计算两矢量之间夹角的公式.

6. 推导计算相伴度量张量的公式（1.6-6）

$$g^{rs}=\frac{D^{rs}}{g}$$

式中 D^{rs} = 在行列式 g 中元素 g_{rs} 的代数余子式

$$g=|g_{ij}|$$

并写出上式中 D^{rs} 的具体表示式.

7. 证明在正交曲线坐标系中：

$$g_{ij}=\begin{cases}(H_i)^2 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

$$g^{ii}=\frac{1}{g_{ii}}=\frac{1}{(H_i)^2}\quad (i\ 不求和)$$

$$g^{ij}=0 \quad (i\neq j)$$
$$\boldsymbol{g}^k=g^{kk}\boldsymbol{g}_k \quad (k\text{ 不求和})$$

8．证明：

$$v^r=v_s g^{rs} \qquad (1.6-12)$$
$$v_r=v^s g_{rs} \qquad (1.6-11)$$

9．证明：

$$\in_{ijk}=\frac{\partial z^r}{\partial x^i}\frac{\partial z^s}{\partial x^j}\frac{\partial z^t}{\partial x^k}e_{rst}=e_{ijk}\left|\frac{\partial z^m}{\partial x^n}\right|=e_{ijk}\sqrt{g}$$
$$\in^{ijk}=\frac{\partial x^i}{\partial z^r}\frac{\partial x^j}{\partial z^s}\frac{\partial x^k}{\partial z^t}e^{rst}=e^{ijk}\left|\frac{\partial x^m}{\partial z^n}\right|=e^{ijk}\frac{1}{\sqrt{g}}$$

式中 $g=|g_{ij}|$.

10．推导关于二阶行列式的公式(1.9-27)～(1.9-29).

11．证明：曲线坐标系是正交坐标系的必要和充分的条件是：在整个域内 $g_{ij}=0$ $(i\neq j)$.

12．证明：$\boldsymbol{g}_r\times\boldsymbol{g}_s=\in_{rst}\boldsymbol{g}^t$，$\boldsymbol{g}^r\times\boldsymbol{g}^s=\in^{rst}\boldsymbol{g}_t$. 因此，若矢量 $\boldsymbol{g}_1$ 与 $\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3$ 的标量积表示为 $[\boldsymbol{g}_1\ \ \boldsymbol{g}_2\ \ \boldsymbol{g}_3]$ 或 $(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)$，则有

$$[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]=(\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)=\sqrt{g}$$
$$[\boldsymbol{g}^1\boldsymbol{g}^2\boldsymbol{g}^3]=(\boldsymbol{g}^1,\boldsymbol{g}^2\times\boldsymbol{g}^3)=\frac{1}{\sqrt{g}}$$

13．以矢元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{g}_2\mathrm{d}x^2$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3=\boldsymbol{g}_3\mathrm{d}x^3$ 为邻边的平行四边形面元的面积是

$$\mathrm{d}A_1=|\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3|=|\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3|\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

证明：

$$\mathrm{d}A_1=\sqrt{(gg^{11})}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

作为一般情况，以矢元 $\boldsymbol{g}_j\mathrm{d}x^j$ 和 $\boldsymbol{g}_k\mathrm{d}x^k$ 为邻边的平行四边形面元（在 x^i 曲面上）$\mathrm{d}A^i$ 的面积是

$$\mathrm{d}A_i=\sqrt{(gg^{ii})}\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k \qquad (i\text{ 不求和},i\neq j\neq k)$$

请证明上式.

14．参考第12题，证明体元的体积为

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3=[\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3]\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3=\sqrt{g}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{g}_1\mathrm{d}x^1$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{g}_2\mathrm{d}x^2$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}_3=\boldsymbol{g}_3\mathrm{d}x^3$.

第二章 张量代数

§2.1 张量的加法(减法)

两个同阶、同变异(结构)的张量可以相加(或相减),张量相加(或相减)是相加(或相减)其同名的分量.

设 $A^i_{\cdot jk}$、$B^i_{\cdot jk}$ 是张量,则

$$C^i_{\cdot jk} = A^i_{\cdot jk} + B^i_{\cdot jk} \tag{2.1-1}$$

也是张量.可以证明,$A^i_{\cdot jk}$、$B^i_{\cdot jk}$ 相加(减)的结果是一个同阶同变异的张量.

今证明如下.设坐标系由 x^i 作容许变换为另一新坐标系 $\bar{x}^i$,则张量 $A^i_{\cdot jk}$、$B^i_{\cdot jk}$ 按以下法则变换:

$$\bar{A}^i_{\cdot jk}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}A^p_{\cdot qr}(x)$$

$$\bar{B}^i_{\cdot jk}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}B^p_{\cdot qr}(x)$$

将上两式相加得

$$\bar{A}^i_{\cdot jk}(\bar{x}) + \bar{B}^i_{\cdot jk}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}[A^p_{\cdot qr}(x) + B^p_{\cdot qr}(x)]$$

上式表明$(A^p_{\cdot qr}(x) + B^p_{\cdot qr}(x))$是张量,它与 $A^i_{\cdot jk}$、$B^i_{\cdot jk}$ 服从同样的变换法则,因此,它与 $A^i_{\cdot jk}$、$B^i_{\cdot jk}$ 是同阶同变异的张量,记为 $C^i_{\cdot jk}$,即

$$\bar{C}^i_{\cdot jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k}C^p_{\cdot qr}$$

由此证明,两个同阶、同变异的张量相加(或相减),其结果是一个同阶同变异的新张量((2.1-1)式).

§2.2 对称张量、反对称张量

一、对称张量

一般来说,$C_{ij} \neq C_{ji}$.但在以前和以后的讨论中都可看到,对于许多张

量来说,满足如下的关系式:

$$C_{ij} = C_{ji} \tag{2.2-1}$$

这样的张量,称为二阶对称张量.同样,C^{ij} 也是二阶对称张量,若它们满足以下的关系式:

$$C^{ij} = C^{ji} \tag{2.2-2}$$

例如,基本度量张量 g_{mk} 和相伴度量张量 g^{mk} 都是对称张量,见(1.5-4)式和(1.6-3a)式.

对称张量的对称性质在坐标变换时是不变的.即张量在某个坐标系 x^i 中是对称的,则在容许变换的任何其他坐标系 $\bar{x}^i$ 中,这个张量也是对称的.今证明如下:

$$\bar{C}^{ij}(\bar{x}) = C^{pq}(x)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}$$

$$\bar{C}^{ji}(\bar{x}) = C^{qp}(x)\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^q}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}$$

根据定义(2.2-2)式,$C^{pq} = C^{qp}$,则上式显然给出了

$$\bar{C}^{ij}(\bar{x}) = \bar{C}^{ji}(\bar{x})$$

二、反对称张量

若张量 C_{ij} 满足以下关系式:

$$C_{ij} = -C_{ji} \tag{2.2-3}$$

则称 C_{ij} 为二阶反对称张量.反对称张量也称为斜对称张量.同样,C^{ij} 也是二阶反对称张量,若它们满足以下关系式:

$$C^{ij} = -C^{ji} \tag{2.2-4}$$

反对称张量的反对称性质,也不随坐标变换而改变,这可以很容易地证明,读者可作为练习.

例如,二维置换张量 $\in^{\alpha\beta} = -\in^{\beta\alpha}$,因此是反对称张量.

三维空间的反对称张量 C_{ij},由于反对称性质[(2.2-3)式],必然有 $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0$.因此,二阶反对称张量 C_{ij} 实际上只有三个独立分量,即 $C_{12} = -C_{21}, C_{13} = -C_{31}, C_{23} = -C_{32}$,正好和一个矢量所具有的独立分量数一样.每一个反对称张量 C_{ij} 都可以通过置换张量与某一矢量 u^k 由以下的关系式联结:

$$u^k = -\frac{1}{2}C_{ij}\in^{ijk}, \qquad u_k = -\frac{1}{2}C^{ij}\in_{ijk} \tag{2.2-5}$$

u^k 称为反对称张量 C_{ij} 的反偶矢量.它的分量是

$$u^1 = \frac{1}{2}(C_{32} - C_{23}) \in^{231}$$

$$u^2 = \frac{1}{2}(C_{13} - C_{31}) \in^{312}$$

$$u^3 = \frac{1}{2}(C_{21} - C_{12}) \in^{123} \qquad (2.2-6)$$

C^{ij} 与 u_k 亦如此.

三、二阶张量的分解

任何一个一般二阶张量 C_{ij} 都可以分解成一个对称张量和一个反对称张量之和,即

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \qquad (2.2-7)$$

式中

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} + C_{ji}) = A_{ji} \qquad (2.2-8)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - C_{ji}) = -\frac{1}{2}(C_{ji} - C_{ij}) = -B_{ji} \qquad (2.2-9)$$

显然,根据[(2.2-1)式和(2.2-3)式],A_{ij} 是对称张量,B_{ij} 是反对称张量.

四、高阶张量的对称和反对称

高阶张量可以是关于一对下标(或上标)对称或反对称.例如置换张量 $\in_{ijk}$,根据定义[(1.9-13)式],它关于任一对下标是反对称的:

$$\in_{ijk} = -\in_{jik}, \quad \in_{ijk} = -\in_{ikj}, \quad \in_{ijk} = -\in_{kji}$$

置换张量 $\in^{ijk}$ 也如此.

§2.3　张量的乘法

两个张量的外积是将它们的分量相乘.这样的运算产生一个新张量,其阶数是相乘两张量的阶数之和.

设 A_{ij}、B^m 是张量,则外积

$$C_{ij}^{\cdot\cdot m} = A_{ij}B^m \qquad (2.3-1)$$

也是张量,今证明如下:设坐标系 x^i 作容许变换成新坐标系 $\bar{x}^i$,则 A_{ij}、B^m 分别按以下法则变换:

$$\bar{A}_{ij}(\bar{x})=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}A_{pq}(x)$$

$$\bar{B}^m(\bar{x})=\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}B^t(x)$$

将上二式等号两边分别相乘，则

$$\bar{A}_{ij}(x)\bar{B}^m(x)=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}A_{pq}(x)B^t(x)$$

可见量 $A_{pq}(x)B^t(x)$服从张量的变换法则．将该量写成 $C_{pq}^{\cdot\cdot t}(x)$，则上式可表示为

$$C_{ij}^{\cdot\cdot m}(\bar{x})=\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^t}\ C_{pq}^{\cdot\cdot t}$$

由此证明：张量 A_{ij}、B^m 的外积 $C_{ij}^{\cdot\cdot m}$ 服从张量变换法则，它是一个张量，其阶数是相乘的两张量的阶数之和，这个张量的变异已由其指标表明．

对任何阶与变异的张量都可以进行乘法运算．若一个张量是由几个张量连乘的乘积，则乘积张量中指标排列的次序由连乘张量的排列次序确定．因此，张量的乘法是不可交换的．例如，张量 $C_{ik}^{\cdot\cdot j}=A_{ik}B^j$ 与张量 $C_{\cdot ik}^{j\cdot\cdot}=B^jA_{ik}$ 是不相等的，因为指标的次序不同．

若 A_{ij} 是对称张量，B^{ij} 是反对称张量，可以很容易证明，它们的乘积等于 0，即

$$A_{ij}B^{ij}=0 \tag{2.3-2}$$

应用这个结论，由于置换张量是关于任一对指标的反对称张量，因此它与任何一个二阶对称张量 A_{ij} 的乘积等于 0，即

$$\in^{ijk}A_{ij}=0\quad（若\ A_{ij}=A_{ji}） \tag{2.3-3}$$

同理

$$\in_{ijk}A^{ij}=0\quad（若\ A^{ij}=A^{ji}）$$

张量代数不定义通常意义下一张量被另一张量所除的除法．

§2.4 缩并、内积

在混合张量中，使一个上标和一个下标相等，然后按求和约定求和，这样的运算，称为缩并．每一缩并，得出一个新张量，比原张量降两阶．

设 $A_{\cdot jkl}^{i}$ 是一个四阶混合张量．作缩并运算，则 $A_{\cdot jil}^{i}=B_{jl}$．今证明如下：当坐标系 x^i 作容许变换成新坐标系 $\bar{x}^i$ 时，$A_{\cdot jkl}^{i}$ 按以下法则变换：

$$\overline{A}^{i}_{\cdot jkl}(\overline{x})=\frac{\partial\overline{x}^{i}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{j}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{k}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{l}}A^{p}_{\cdot qrs}(x)$$

若令指标 i 与 k 相等,可得

$$\overline{A}^{i}_{\cdot jil}(\overline{x})=\frac{\partial\overline{x}^{i}}{\partial x^{p}}\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{j}}\frac{\partial x^{r}}{\partial\overline{x}^{i}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{l}}A^{p}_{\cdot qrs}(x)$$

$$=\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{j}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{l}}\delta^{r}_{p}A^{p}_{\cdot qrs}(x)$$

$$=\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{j}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{l}}A^{p}_{\cdot qps}(x)$$

上式表明:$A^{p}_{\cdot qps}$ 只有两个自由指标,它服从二阶协变张量的变换法则,因此可以写成 B_{qs}. 这样,

$$\overline{B}_{jl}(\overline{x})=\frac{\partial x^{q}}{\partial\overline{x}^{j}}\frac{\partial x^{s}}{\partial\overline{x}^{l}}B_{qs}$$

由此可知,混合张量 $A^{i}_{\cdot jkl}$ 经过缩并 $A^{i}_{\cdot jil}$ 成为二阶张量 B_{jl}.

上面只是以四阶混合张量为例论证缩并运算,但缩并运算可以应用于任意阶混合张量.若缩并的结果,不再存在自由指标,则得出标量.

还可将乘法和缩并结合起来形成新张量,这种运算称为两张量的内乘法,得到的张量称为该两张量的内积.如

$$C_{ml}^{\cdot\cdot m}=A_{ml}B^{m}$$

现在应当明了,用本书普遍张量的指标记法,求和约定的两个指标一定是一个上标和一个下标.

对于直角坐标张量,全部指标都写成下标,这时,缩并是令两个下标相等并求和.

§2.5 张量指标的提升和下降

运用度量张量 g^{kl} 或 g_{kl},可以提升或下降高阶张量的指标.这与§1.6中的(1.6-11)式和(1.6-12)式给出的矢量指标的下降与提升的方法是相同的.

一、提升指标

$$A^{k}_{\cdot l}=g^{mk}A_{ml} \tag{2.5-1}$$

式中的圆点"·"放在被提升的指标原来的位置.在手写时有时略去这个圆点.又如

$$A_{l\cdot}^{k} = g^{km} A_{lm} \tag{2.5-2}$$

应当注意，一般情况下，(2.5－1)式和(2.5－2)式中的混合张量 $A_{\cdot l}^{k}$ 与 $A_{l\cdot}^{k}$ 不一定相同.重复上述步骤，可以提升两个指标：

$$A^{kl} = g^{km} g^{ln} A_{mn} = g^{km} A_{m\cdot}^{\ l} = g^{ln} A_{\cdot n}^{k} \tag{2.5-3}$$

应用(2.5－3)式可以证明，若 A_{kl} 是对称张量，则 A^{kl} 也是对称张量.在这种情况下，$A_{\cdot l}^{k} = A_{l\cdot}^{k}$，这时，指标的相对位置是无关紧要的，可以将它们简单地写作 A_{l}^{k}.

二、下降指标

运用 g_{kl} 可以下降指标.例如

$$A_{\ l}^{k\cdot} = g_{lm} A^{km}$$

$$A_{l}^{\cdot k} = g_{lm} A^{mk}$$

$$A_{kl} = g_{lm} A_{k}^{\cdot m} = g_{km} A_{\ l}^{m\cdot} = g_{km} g_{ln} A^{mn} \tag{2.5-4}$$

按照上述方法，可以看出，提升指标使 A_{kl} 变成 A^{kl}，然后再重新下降指标，其结果得到原来的张量.

总之，下降一个指标，需要用一个因子 g_{kl}；提升一个指标，需要用一个因子 g^{kl}.

通过提升指标或下降指标而得到的张量称为相伴张量.例如 g_{kl}、g^{kl} 与 δ_{l}^{k} 是相伴张量.

给定度量张量分量的空间称为度量空间.在度量空间，张量可以用它的任一种变异形式的分量的集合来表示.一个张量的协变分量、逆变分量或混合分量是同一个张量的不同变异形式的分量.

将本节与§2.4联系起来可以看出，张量指标的提升和下降，就是该张量与度量张量相乘，然后按一双指标进行缩并，即该张量与度量张量的内积.

§2.6 商 法 则

商法则是用于判断函数的集合是不是张量的比较简便的方法.设 $A(i,j,k)$ 是 n^3 个函数的集合，指标 i,j,k 的范围是 $1,2,\cdots,n$.尽管函数集合 $A(i,j,k)$ 有三阶张量所应有的分量数，然而它是不是张量还必须通过变换法则来判断.但商法则提供了另一个较简便的判断方法，即只要知道 $A(i,j,k)$ 与一任意张量的乘积的性质，便能判断 $A(i,j,k)$ 是不

是张量.

例如 $\xi^p(x)$ 是任意一阶张量(矢量),若乘积 $A(p,j,k)\xi^p$(对指标 p 求和)已知为 $A^j_{\cdot k}(x)$ 形式的张量:

$$A(p,j,k)\xi^p = A^j_{\cdot k}$$

便可判断 $A(i,j,k)$ 是一个张量,其形式为 $A^{\cdot j}_{i\cdot k}(x)$. 今证明如下:由于 $A(p,j,k)\xi^p$ 是 $A^j_{\cdot k}(x)$ 形式的张量,若坐标系 x^i 作容许变换为坐标系 $\bar{x}^i$,则

$$\bar{A}(p,j,k)\bar{\xi}^p(\bar{x}) = \bar{A}^j_{\cdot k}(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}A^r_{\cdot s}(x)$$

$$= \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}[A(q,r,s)\xi^q(x)]$$

但 $\xi^q = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\bar{\xi}^p$,将这个式子代入上式等号的右边,并移项得

$$\left[\bar{A}(p,j,k) - \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}A(q,r,s)\right]\bar{\xi}^p(\bar{x}) = 0$$

$\bar{\xi}^p$ 是任意一阶张量,因此上式方括号中的量必须为 0. 这样,

$$\bar{A}(p,j,k) = \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}A(q,r,s)$$

这正是形式为 $A^{\cdot j}_{i\cdot k}(x)$ 的张量的变换法则.

上面的例子的模式可以推广,以证明下面的定理.

若 $A(i_1,i_2,\cdots,i_r)$ 是变量为 x^i 的函数的集合,$\xi^s(x)$ 是一任意矢量,若乘积 $A(s,i_2,\cdots,i_r)\xi^s$ 是 个 $A^{j_1j_2\cdots j_q}_{k_1k_2\cdots k_p}(x)$ 形式的张量,则集合 $A(i_1,i_2,\cdots,i_r)$ 是一个张量,其形式为 $A^{j_1\cdots j_q}_{ik_1\cdots k_p}(x)$,式中 $p+q+1=r$.

用于判断一阶张量、二阶张量的商法则是以下几个定理和推论,读者可自行证明,方法与上例相同.

定理 1 设 ξ_s 是一任意协变矢量,而 ξ_sA^s 是标量,

$$\xi_sA^s = \bar{\xi}_s\bar{A}^s$$

则 A^s 是逆变矢量.

定理 2 设 ξ_s 是一任意协变矢量,而 $B^r = A^{rs}\xi_s$ 是一逆变矢量,则 A^{rs} 是二阶逆变张量.

推论 若 ξ_s、η_t 是任意的协变矢量,而 $A^{st}\xi_s\eta_t$ 是标量,则 A^{st} 是二阶逆变张量.

定理 3 设 ξ^s 是任意逆变矢量，而 $A_{st}\xi^s\xi^t$ 是标量，则 $A_{st}+A_{ts}$ 是二阶协变张量.

若 A_{st} 是对称的，$A_{st}=A_{ts}$，而 $A_{st}\xi^s\xi^t$ 是标量，则 A_{st} 是二阶协变张量.

例如，由(1.5-3)式得

$$ds^2=g_{km}dx^k dx^m$$

等号左边是标量；dx^k 是逆变矢量；g_{km} 是对称的[(1.5-5)式]，则由定理 3 可知 g_{km} 是二阶协变张量.

§2.7 张量的物理分量

一、一阶张量(矢量)的物理分量

任何一个一阶张量(矢量) $\boldsymbol{V}$，可以用它的张量分量表示为 $\boldsymbol{V}=v^r\boldsymbol{g}_r=v_s\boldsymbol{g}^s$[(1.6-10)式]. 在曲线坐标系中，基矢量 $\boldsymbol{g}_r$ 和 $\boldsymbol{g}^r$ 通常并不是单位矢量，它们的大小是

$$|\boldsymbol{g}_r|=\sqrt{g_{rr}},\quad |\boldsymbol{g}^r|=\sqrt{g^{rr}}\quad(r\text{ 不求和})$$

基矢量 $\boldsymbol{g}_r$ 和 $\boldsymbol{g}^r$ 可以有量纲，而且各个基矢量(或对偶基矢量)的量纲可以各不相同. 例如，在圆柱坐标系中 $|\boldsymbol{g}_1|=|\boldsymbol{g}_3|=1$，无量纲，而 $|\boldsymbol{g}_2|=x^1$，有量纲. 因此，在曲线坐标系中，矢量的各个逆变分量(或各个协变分量)不一定有相同的物理量纲.

若将(1.6-9)式和(1.6-10)式中矢量 $\boldsymbol{V}$ 的分量写成下式：

$$\boldsymbol{V}=\sum_{r=1}^{3}v^r\sqrt{g_{rr}}\frac{\boldsymbol{g}_r}{\sqrt{g_{rr}}}\tag{2.7-1}$$

或

$$\boldsymbol{V}=\sum_{r=1}^{3}v_r\sqrt{g^{rr}}\frac{\boldsymbol{g}^r}{\sqrt{g^{rr}}}\tag{2.7-2}$$

则由于 $\boldsymbol{g}_r\Big/\sqrt{g_{rr}}$ 和 $\boldsymbol{g}^r\Big/\sqrt{g^{rr}}$ 是单位矢量，则各个分量 $v^r\sqrt{g_{rr}}$ 和 $v_r\sqrt{g^{rr}}$ (r 不求和)与矢量 $\boldsymbol{V}$ 有相同的物理量纲. 可以看出，$v^r\sqrt{g_{rr}}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 沿单位矢量 $\boldsymbol{g}_r\Big/\sqrt{g_{rr}}$ 方向分解的分量，$\boldsymbol{g}_r\Big/\sqrt{g_{rr}}$ 与坐标曲线相切；而 $v_r\sqrt{g^{rr}}$ 是沿单位矢量 $\boldsymbol{g}^r\Big/\sqrt{g^{rr}}$ 方向分解的分量，$\boldsymbol{g}^r\Big/\sqrt{g^{rr}}$ 与坐标面垂直.

$$v^r\sqrt{g_{\underline{rr}}},\quad v_r\sqrt{g^{\underline{rr}}}\ (r\ \text{不求和})$$

称为矢量 $\boldsymbol{V}$ 的物理分量.在坐标变换时,矢量的物理分量不服从张量的变换法则,因此不是张量分量.物理分量以符号 $v^{(r)}$、$v_{(r)}$ 表示,以区别于张量分量 v^r、v_r.在曲线坐标系中,$v^{(r)}$ 和 $v_{(r)}$ 的方向和大小一般不相同,但在正交曲线坐标系中,它们相同.

在工程应用时,常选择单位矢量 $\boldsymbol{g}_r\big/\sqrt{g_{\underline{rr}}}$ 作为基矢量,以 $\boldsymbol{e}_r$ 表示,它的方向与坐标曲线 x^r 相切.这样,矢量 $\boldsymbol{V}$ 可以沿 $\boldsymbol{e}_r$ 方向按平行四边形法则分解,即

$$\boldsymbol{V}=v^{(r)}\boldsymbol{e}_r \tag{2.7-3}$$

式中

$$\boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{g}_r}{\sqrt{g_{\underline{rr}}}} \tag{2.7-4}$$

$$v^{(r)}=v^r\sqrt{g_{\underline{rr}}} \tag{2.7-5}$$

必须注意,一个物理量的张量分量是以一个特定的曲线坐标系作参考的,它们可以具有、也可以不具有相同的物理量纲,一般是具有不同的物理量纲.这种情况的出现,是为了可以有选择任意的量作为曲线坐标的自由,这是个很大的方便.例如在三维空间的球坐标系中,一点的位置由一个长度和两个角度来定.在这种情况下,必须区别张量分量和物理分量,后者是有相同的物理量纲的.

需要说明:本节出现 $g_{\underline{rr}}\big/g^{\underline{rr}}$ 这样的符号,指标 r 在下标/上标出现两次,但它们下面加了"－－",这表示 $\underline{r}\,\underline{r}$ 不是直角坐标张量的求和指标.$\sqrt{g_{\underline{rr}}}\big/\sqrt{g^{\underline{rr}}}$ 只表示 $\boldsymbol{g}_r\big/\boldsymbol{g}^r$ 的大小.本书以后凡出现 $g_{\underline{rr}}\big/g^{\underline{rr}}$,其意义均与此相同.

二、高阶张量的物理分量

一阶张量(矢量)的物理分量的定义,可以推广到高阶张量,但高阶张量的物理分量更复杂.本书将在第二篇结合应力张量、应变张量来讨论二阶张量的物理分量.

习 题

1. 证明:一个张量若对于它的某两个下标(或上标)反对称,则当坐标变换时,张

量对于该两个指标的反对称性不变.

2. 证明:一个对称张量 s^{ij} 和一个反对称张量 w_{ij} 的乘积恒等于 0.

3. 证明:

$$\in^{ijk}A_{ij}=0 \quad \in_{ijk}A^{ij}=0$$

上式中,A_{ij},A^{ij} 都是对称张量.

4. 证明:张量 $w_{ik}=\in_{ijk}u^{j}$ 是反对称张量,式中 u^{j} 是一个矢量.

5. 证明:若 A^{jk} 是一个反对称张量,则方程

$$w_{i}=\frac{1}{2}\in_{ijk}A^{jk}$$

的惟一解是

$$A^{mn}=\in^{mni}w_{i}$$

6. 已知 A_{kl} 是对称张量. 求证:A^{kl} 也是对称张量.

7. 证明本章§2.6 中的定理 1～定理 3.

第三章 张量分析

将偏导数的概念推广,建立协变导数的概念,使得一个张量的协变导数是另一个张量,这是张量分析发展中最重要的里程碑.张量的协变导数是本章讨论的重点.

§3.1 基矢量的偏导数与克里斯托费尔符号

求一个矢量的导数,必须对它的各个分量与基矢量乘积之和求导:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x^j} = \boldsymbol{V}_{,j} = (V^i \boldsymbol{g}_i)_{,j} = V^i_{,j}\boldsymbol{g}_i + V^i \boldsymbol{g}_{i,j} \qquad (3.1-1a)$$

$$= (V_i \boldsymbol{g}^i)_{,j} = V_{i,j}\boldsymbol{g}^i + V_i \boldsymbol{g}^i_{,j} \qquad (3.1-1b)$$

上式中的","号表示偏导数,本书以后均采用此记法.

(3.1-1a)、(3.1-1b)式中有基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 和对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 对于曲线坐标 x^j 的偏导数 $\boldsymbol{g}_{i,j}$ 和 $\boldsymbol{g}^i_{,j}$.下面分别进行讨论.

一、基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 的偏导数 $\boldsymbol{g}_{i,j}$

由基矢量的定义[(1.4-4)式]可以写出

$$\boldsymbol{g}_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial z^s}{\partial x^i}\boldsymbol{i}_s\right) = \frac{\partial^2 z^s}{\partial x^i \partial x^j}\boldsymbol{i}_s$$

这表示基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 对于坐标 x^j 的偏导数也是矢量,它也可以分解成沿对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^k$ 或基矢量 $\boldsymbol{g}_k$ 方向的分量:

$$\boldsymbol{g}_{i,j} = \Gamma_{ijk}\boldsymbol{g}^k = \Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k \qquad (3.1-2)$$

式中 Γ_{ijk} 是 $\boldsymbol{g}_{i,j}$ 沿 $\boldsymbol{g}^k$ 方向的分量;Γ^k_{ij} 是 $\boldsymbol{g}_{i,j}$ 沿 $\boldsymbol{g}_k$ 方向的分量.

从它们的意义可以理解,为什么 Γ_{ijk} 和 Γ^k_{ij} 中包含 i,j,k 三个指标.若用另一基矢量点乘(3.1-2)式,就得到

$$\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}_k = \Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l\cdot\boldsymbol{g}_k = \Gamma_{ijl}\delta^l_k = \Gamma_{ijk} \qquad (3.1-3a)$$

$$\boldsymbol{g}_{i,j}\cdot\boldsymbol{g}^k = \Gamma^l_{ij}\boldsymbol{g}_l\cdot\boldsymbol{g}^k = \Gamma^l_{ij}\delta^k_l = \Gamma^k_{ij} \qquad (3.1-3b)$$

Γ_{ijk} 称为第一类克里斯托费尔(Christoffel)符号;Γ^k_{ij} 称为第二类克里斯托费尔符号.(3.1-2)式或(3.1-3)式都可以作为克里斯托费尔符号的

定义.

二、克里斯托费尔符号的性质及其计算

(一) 克里斯托费尔符号不是张量(这个问题留待后面证明),但它的第三个指标可以像张量分量的指标一样提升或下降.这可以证明如下,用 $\boldsymbol{g}_l$ 或 $\boldsymbol{g}^l$ 点乘(3.1-2)式中的第二部分和第三部分,可得

$$\Gamma_{ijk}\delta_l^k = \Gamma_{ijl} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} \tag{3.1-4a}$$

和

$$\Gamma_{ijk}g^{kl} = \Gamma_{ij}^k\delta_k^l = \Gamma_{ij}^l \tag{3.1-4b}$$

然而,这个论断对(3.1-2)式中的其他两个指标 i 和 j 是不适用的.

(二) 克里斯托费尔符号对前两个指标是对称的.这可证明如下,由(1.4-4)式得

$$\boldsymbol{g}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{a}$$

将上式对 x^j 求导,得

$$\boldsymbol{g}_{i,j} = \boldsymbol{r}_{,ij} = \boldsymbol{r}_{,ji} = \boldsymbol{g}_{j,i} \tag{3.1-5}$$

因此,由上式及(3.1-2)式可得

$$\Gamma_{ijl}\boldsymbol{g}^l = \Gamma_{jil}\boldsymbol{g}^l, \qquad \Gamma_{ij}^l\boldsymbol{g}_l = \Gamma_{ji}^l\boldsymbol{g}_l$$

以 $\boldsymbol{g}_k$ 和 $\boldsymbol{g}^k$ 分别点乘上面左、右两式后,得

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}, \qquad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \tag{3.1-6}$$

(三) 克里斯托费尔符号可按以下公式计算.由(1.5-2)式得

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j$$

将上式对 x^k 求导,可得

$$g_{ij,k} = \boldsymbol{g}_{i,k}\cdot\boldsymbol{g}_j + \boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{g}_{j,k}$$

利用(3.1-3a)式,有

$$g_{ij,k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \tag{3.1-7}$$

将上式的指标 i、j、k 进行轮换,分别写出 $g_{jk,i}$、$g_{ki,j}$,并利用(3.1-6)式,可得

$$\Gamma_{jki} + \Gamma_{kij} = g_{ij,k} \tag{b}$$

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{ijk} = g_{jk,i} \tag{c}$$

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} = g_{ki,j} \tag{d}$$

从(c)与(d)之和减去(b),便得到关系式:

$$2\Gamma_{ijk} = g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k} \tag{3.1-8a}$$

由(3.1－4b)式可得

$$2\Gamma_{ij}^{k} = 2g^{kl}\Gamma_{ijl} = g^{kl}(g_{jl,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}) \tag{3.1-8b}$$

若度量张量的分量已知，用上述(3.1－8a、b)式便可计算坐标系的克里斯托费尔符号．由此可知，克里斯托费尔符号也是坐标系的几何特性．

由于直角坐标系的 g_{ij} 是常数，所以在直角坐标系中，

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{ij}^{k} = 0$$

(四) 克里斯托费尔符号不是张量，今证明如下：

当坐标系 x^i 作容许变换成新坐标系 $\bar{x}^i$ 时，基本度量张量 g_{ij} 按下式变换：

$$\bar{g}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}g_{ij} \tag{e}$$

将上式对 $\bar{x}^n$ 偏微分，得

$$\frac{\partial \bar{g}_{lm}}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^n}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}g_{ij} + \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^m\partial \bar{x}^n}g_{ij}$$

将上式的指标 l、m、n 轮换，可得两个类似的方程，将这两个方程相加，减去上面的方程，并除以 2，适当变换哑指标，可得

$$\Gamma_{lmn}(\bar{x}) = \Gamma_{ijk}(x)\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m} \tag{3.1-9}$$

上式表明当坐标变换时，第一类克里斯托费尔符号 Γ_{ijk} 如何变换．

逆变度量张量的变换法则是

$$\bar{g}^{np} = g^{ks}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \tag{f}$$

将方程(3.1－9)式的两边内乘以(f)式的两边，化简后，得

$$\bar{\Gamma}_{lm}^{p}(\bar{x}) = \Gamma_{ij}^{s}(x)\frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^l\partial \bar{x}^m} \tag{3.1-10}$$

上式表明坐标变换时，第二类克里斯托费尔符号 Γ_{ij}^{s} 如何变换．由(3.1－9)式和(3.1－10)式可以看出，克里斯托费尔符号不是张量．

三、对偶基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 的偏导数 $\boldsymbol{g}^i_{,j}$

由(1.6－1)式给出

$$\boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}^j = \delta_i^j$$

将上式对 x^k 求导，得

$$\boldsymbol{g}_{i,k}\cdot\boldsymbol{g}^{j}+\boldsymbol{g}_{i}\cdot\boldsymbol{g}^{j}_{,k}=0$$

因此

$$\boldsymbol{g}_{i}\cdot\boldsymbol{g}^{j}_{,k}=-\boldsymbol{g}_{i,k}\cdot\boldsymbol{g}^{j}=-\Gamma^{j}_{ik}$$

变换上式指标，得

$$\boldsymbol{g}_{k}\cdot\boldsymbol{g}^{i}_{,j}=-\Gamma^{i}_{kj}$$

将上式两边乘以 $\boldsymbol{g}^{k}$，

$$(\boldsymbol{g}_{k}\cdot\boldsymbol{g}^{i}_{,j})\boldsymbol{g}^{k}=-\Gamma^{i}_{kj}\boldsymbol{g}^{k}$$

利用(1.6－16)式，得

$$\boldsymbol{g}^{i}_{,j}=-\Gamma^{i}_{jk}\boldsymbol{g}^{k} \tag{3.1-11}$$

§3.2 正交曲线坐标系的克里斯托费尔符号

克里斯托费尔符号描述了曲线坐标系的性质．现将圆柱坐标系、球坐标系的克里斯托费尔符号以及正交曲线坐标系的克里斯托费尔符号的一般表示式列出．

一、正交曲线坐标系

由§1.7知

$$g^{ii}=1/g_{ii},\qquad \boldsymbol{g}^{k}=g^{kk}\boldsymbol{g}_{k}$$

$$g=g_{11}g_{22}g_{33}=(H_1H_2H_3)^2$$

$$\Gamma_{jji}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^{i}},\qquad \Gamma_{jii}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^{j}},\qquad \Gamma_{iij}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^{j}},$$

$$\Gamma_{ijk}=0(i\neq j\neq k) \tag{3.2-1}$$

$$\Gamma^{i}_{jj}=-\frac{1}{2g_{ii}}\frac{\partial g_{jj}}{\partial x^{i}},\qquad \Gamma^{i}_{ii}=\frac{\partial}{\partial x^{i}}(\ln\sqrt{g_{ii}})$$

$$\Gamma^{i}_{ij}=\frac{\partial}{\partial x^{j}}(\ln\sqrt{g_{ii}}),\qquad \Gamma^{k}_{ij}=0(i\neq j\neq k) \tag{3.2-2}$$

二、圆柱坐标系(图 1－4)

由§1.7知圆柱坐标系的 g_{kl} 和 g^{kl} 以矩阵形式列出是

$$(g_{kl})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (x^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$(g^{kl})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/(x^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由(3.1－8a)式得

$$\Gamma_{122}=\Gamma_{212}=x^1,\quad \Gamma_{221}=-x^1$$

$$\text{所有其他的 } \Gamma_{klm}=0 \tag{3.2-3}$$

由(3.1－4b)式得

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=g^{22}\Gamma_{122}=1/x^1,\quad \Gamma^1_{22}=g^{11}\Gamma_{221}=-x^1$$

$$\text{所有其他的 } \Gamma^m_{kl}=0 \tag{3.2-4}$$

三、球坐标系(图1－5)

$$(g_{kl})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (x^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & (x^1\sin x^2)^2\end{pmatrix}$$

$$(g^{kl})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/(x^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1/(x^1\sin x^2)^2\end{pmatrix}$$

由(3.1－8a)式及(3.1－4b)式得

$$\Gamma_{122}=-\Gamma_{221}=x^1,\quad \Gamma_{133}=-\Gamma_{331}=x^1(\sin x^2)^2$$

$$\Gamma_{233}=-\Gamma_{332}=(x^1)^2\sin x^2\cos x^2,$$

$$\text{所有其他的 } \Gamma_{klm}=0 \tag{3.2-5}$$

$$\Gamma^1_{22}=-x^1,\quad \Gamma^1_{33}=-x^1(\sin x^2)^2,\quad \Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=1/x^1$$

$$\Gamma^2_{33}=-\sin x^2\cos x^2,\quad \Gamma^3_{23}=\cot x^2$$

$$\text{所有其他的 } \Gamma^m_{kl}=0 \tag{3.2-6}$$

§3.3 矢量的协变导数

一、求矢量的偏导数

现在回到求矢量的偏导数[(3.1－1a)式]．利用(3.1－2)式得

$$\boldsymbol{V}_{,j}=v^i_{,j}\boldsymbol{g}_i+v^i\Gamma^k_{ij}\boldsymbol{g}_k$$

变换最后一项中两个哑指标的字符，便可以提出公因子 $\boldsymbol{g}_i$，于是

$$\boldsymbol{V}_{,j}=(v^i_{,j}+v^k\Gamma^i_{jk})\boldsymbol{g}_i=v^i|_j\boldsymbol{g}_i \qquad (3.3-1)$$

式中

$$v^i|_j\equiv v^i_{,j}+v^k\Gamma^i_{jk} \qquad (3.3-2)$$

它是矢量 $\boldsymbol{V}$ 对于 x^j 的偏导数沿 $\boldsymbol{g}_i$ 方向的分量. 由上式可以看出, $v^i|_j$ 与矢量 $\boldsymbol{V}$ 的 $\boldsymbol{g}_i$ 方向的分量 v^i 对于 x^j 的偏导数 $v^i_{,j}$ 是不同的, 它们差一项 $v^k\Gamma^i_{jk}$, 应当认清这二者的差别. $v^i|_j$ 称为逆变矢量 v^i 的协变导数.

利用(3.1-11)式, 则从(3.1-1b)式可得与(3.3-1)式类似的表达式:

$$\boldsymbol{V}_{,j}=v_{i,j}\boldsymbol{g}^i-v_i\Gamma^i_{jk}\boldsymbol{g}^k=(v_{i,j}-v_k\Gamma^k_{ij})\boldsymbol{g}^i=v_i|_j\boldsymbol{g}^i \qquad (3.3-3)$$

由此得到协变矢量 v_i 的协变导数 $v_i|_j$ 的表达式为

$$v_i|_j\equiv v_{i,j}-v_k\Gamma^k_{ij} \qquad (3.3-4)$$

和上面指出的一样, 应当注意 $v_i|_j$ 与 $v_{i,j}$ 的差别.

必须指出, 在直角坐标系中, $g_{jk}=\delta_{jk}$, 由(3.1-8a、b)式可知, 这时 $\Gamma_{ijk}=\Gamma^k_{ij}=0$. 因此, 在直角坐标系中, 协变导数和普通偏导数之间没有区别.

二、矢量 V 的微分

应用(3.3-1)、(3.3-2)式和(3.3-3)、(3.3-4)式这两对方程, 可以写出矢量 $\boldsymbol{V}$ 的微分, 这种微分形式在建立物理系统的微分方程时是有用的. 当矢量 $\boldsymbol{V}(x^j)$ 从一点 x^j 沿着分量为 dx^j 的矢元移动到相邻的一点 x^j+dx^j 时, 这个矢量 $\boldsymbol{V}(x^j)$ 的改变为 $d\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_{,j}dx^j$, 于是得

$$d\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_{,j}dx^j=v^i|_j\boldsymbol{g}_i dx^j \qquad (3.3-5a)$$

或

$$d\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_{,j}dx^j=v_i|_j\boldsymbol{g}^i dx^j \qquad (3.3-5b)$$

三、为什么 $v^i|_j$ 和 $v_i|_j$ 称为协变导数, 协变导数是不是张量

设坐标系 x^i 作容许变换成新坐标系 $\bar{x}^i$, 矢量 $\boldsymbol{V}$ 用它在 $\bar{x}^i$ 中的分量表示为

$$\boldsymbol{V}=\bar{v}_i\bar{\boldsymbol{g}}^i$$

上式对 $\bar{x}^m$ 求导得,

$$\boldsymbol{V}_{,\bar{m}}=\frac{\partial\bar{v}_i}{\partial\bar{x}^m}\bar{\boldsymbol{g}}^i+\bar{v}_i\frac{\partial\bar{\boldsymbol{g}}^i}{\partial\bar{x}^m}=\bar{v}_i|_{\bar{m}}\bar{\boldsymbol{g}}^i$$

另一方面, 用微分的链式法则, 可得

$$\mathbf{V}_{,\bar{m}} = \mathbf{V}_{,k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} = v_i|_k \mathbf{g}^i \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$$

使上述二方程的右边相等，得

$$\bar{v}_i|_{\bar{m}}\bar{\mathbf{g}}^i = v_i|_k \mathbf{g}^i \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} \qquad (3.3-6)$$

用基矢量 $\mathbf{g}_j$ 的变换公式

$$\bar{\mathbf{g}}_l = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}\mathbf{g}_j$$

分别点乘(3.3－6)式等号的两边，可得

$$\bar{v}_l|_{\bar{m}} = v_j|_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$$

更换指标，上式可写成

$$\bar{v}_i|_j = v_m|_n \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \qquad (3.3-7)$$

这表明在坐标变换时，$v_i|_j$ 服从二阶协变张量的变换法则，因此 $v_i|_j$ 是二阶协变张量．求导的指标 j 服从张量的协变分量的变换法则，所以称为协变导数．

同样可以证明 $v^i|_j$ 是二阶混合张量．求导的指标 j 是协变指标．

由此可知，一阶张量(矢量)的协变导数是另一个张量，它比原来的张量高一阶，增加一个协变指标．

由此可以推论，协变导数的指标可以提升和下降，即

$$v_i|_j g^{ik} = v^k|_j, \qquad v_i|^k = v_i|_j g^{jk} \qquad (3.3-8)$$

四、标量 ϕ 的偏导数

标量函数 $\phi(x^i)$ 对 x^i 的偏导数是

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \phi_{,i}$$

坐标系 x^i 作容许变换成 $\bar{x}^i$，则

$$\bar{\phi}_{,i} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} = \phi_{,k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \qquad (3.3-9)$$

上式表明 $\phi_{,i}$ 跟矢量的协变分量一样变换．这样，可以把 $\phi_{,i}$ 写成

$$\phi_{,i} = \phi|_i \qquad (3.3-10)$$

因此，对于标量函数 ϕ 来说，普通偏导数和协变导数是恒等的．由于 $\phi|_i$ 是矢量的分量，它们确定一个矢量

$$u = \phi|_i g^i \equiv \text{grad } \phi \tag{3.3-11}$$

它是标量函数 $\phi(x^i)$ 的梯度矢量.梯度矢量度量标量场的变化率,它指向标量场 ϕ 变化最大的方向.这个问题将在§3.6进一步讨论.

§3.4 高阶张量的协变导数

一、二阶张量的协变导数

用两个矢量 u^i,v^j 内乘一个张量 A_{ij} 得到一个标量 ϕ:

$$\phi = A_{ij}u^i v^j$$

上式对于 x^k 求导,并利用(3.3-2)式,可得

$$\begin{aligned}\phi_{,k} &= A_{ij,k}u^i v^j + A_{ij}u^i_{,k}v^j + A_{ij}u^i v^j_{,k} \\ &= A_{ij,k}u^i v^j + A_{ij}u^i|_k v^j + A_{ij}u^i v^j|_k - \\ &\quad A_{ij}u^l \Gamma^i_{kl} v^j - A_{ij}u^i v^l \Gamma^j_{kl}\end{aligned} \tag{a}$$

如果定义

$$A_{ij}|_k u^i v^j \equiv A_{ij,k}u^i v^j - A_{ij}u^l v^j \Gamma^i_{kl} - A_{ij}u^i v^l \Gamma^j_{kl} \tag{b}$$

则根据(3.3-10)式、(a)式可以写成

$$\begin{aligned}\phi|_k &= (A_{ij}u^i v^j)|_k \\ &= A_{ij}|_k u^i v^j + A_{ij}u^i|_k v^j + A_{ij}u^i v^j|_k\end{aligned} \tag{3.4-1}$$

改变哑指标的字符,(b)式可以写成

$$A_{ij}|_k u^i v^j \equiv (A_{ij,k} - A_{lj}\Gamma^l_{ik} - A_{il}\Gamma^l_{jk})u^i v^j \tag{c}$$

当且仅当

$$A_{ij}|_k \equiv A_{ij,k} - A_{lj}\Gamma^l_{ik} - A_{il}\Gamma^l_{jk} \tag{3.4-2}$$

时,(c)式对某个 A_{ij} 和所有矢量 u^i,v^j 是成立的.(3.4-2)式就是二阶张量的协变导数 $A_{ij}|_k$ 的定义.

定义协变导数 $A_{ij}|_k$ 时并没有假定张量 A_{ij} 是对称的,这一点很重要.当 $A_{ij} \neq A_{ji}$ 时,这个定义也成立.

用类似的方法,可以定义:

$$A^i_{\cdot j}|_k \equiv A^i_{\cdot j,k} + A^l_{\cdot j}\Gamma^i_{kl} - A^i_{\cdot l}\Gamma^l_{jk} \tag{3.4-3}$$

$$A_i^{\cdot j}|_k \equiv A_i^{\cdot j}{}_{,k} - A_l^{\cdot j}\Gamma^l_{ik} + A_i^{\cdot l}\Gamma^j_{kl} \tag{3.4-4}$$

$$A^{ij}|_k \equiv A^{ij}_{,k} + A^{lj}\Gamma^i_{kl} + A^{il}\Gamma^j_{kl} \tag{3.4-5}$$

二、高阶张量的协变导数

类似(3.4－2)～(3.4－5)式的定义对高于二阶的张量也成立．设张量 $A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ 是一个 p 阶逆变 q 阶协变的 $(p+q)$ 阶张量，则

$$
\begin{aligned}
A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\Big|_k = {} & A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q,k} + A^{li_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\Gamma^{i_1}_{lk} + \cdots + \\
& A^{i_1\cdots i_{p-1}l}_{j_1\cdots j_q}\Gamma^{i_p}_{lk} - A^{i_1i_2\cdots i_p}_{lj_2\cdots j_q}\Gamma^{l}_{j_1k} - \cdots - \\
& A^{i_1\cdots i_{p-1}i_p}_{j_1\cdots j_{q-1}l}\Gamma^{l}_{j_qk}
\end{aligned}
\qquad (3.4-6)
$$

这个协变导数是 p 阶逆变 $(q+1)$ 阶协变的 $(p+q+1)$ 阶张量．

一个张量的协变导数是另一个张量，它比原来的张量高一阶，增加一个协变指标．

三、里奇(Ricci)定理

$$g_{ij}|_k = g^{ij}|_k = 0$$

证明　由(3.4－2)及(3.1－4a)式，

$$
\begin{aligned}
g_{ij}|_k &= g_{ij,k} - g_{lj}\Gamma^l_{ik} - g_{il}\Gamma^l_{kj} \\
&= g_{ij,k} - \Gamma_{ikj} - \Gamma_{kji}
\end{aligned}
$$

由(3.1－7)式可知上式等于0，因此

$$g_{ij}|_k = 0 \qquad (3.4-7)$$

同样可以证明

$$g^{ij}|_k = 0 \qquad (3.4-8)$$

由此证明了度量张量的协变导数等于0．因此，在求协变导数的过程中，度量张量 g_{ij} 和 g^{ij} 就像是常数，可以自由地把它们移到协变导数算符之外或之内．例如：

$$
\begin{aligned}
(v^ig_{ij})|_k &= v^i|_k g_{ij} = v_j|_k \\
(v_ig^{ij})|_k &= v_i|_k g^{ij} = v^j|_k
\end{aligned}
\qquad (3.4-9)
$$

四、求导数的乘积定律适用于协变导数

若

$$A^iB_{jk} = C^i_{\cdot jk}$$

由(3.4－6)式得

$$C^i_{\cdot jk}|_r = C^i_{\cdot jk,r} + \Gamma^i_{lr}C^l_{\cdot jk} - \Gamma^l_{jr}C^i_{\cdot lk} - \Gamma^l_{kr}C^i_{\cdot jl}$$

这样

$$(A^iB_{jk})|_r = A^i_{,r}B_{jk} + A^iB_{jk,r} + \Gamma^i_{rl}A^lB_{jk} - A^i\Gamma^l_{jr}B_{lk} - A^i\Gamma^l_{kr}B_{jl}$$

由此可知,

$$(A^iB_{jk})|_r = A^i|_rB_{jk} + A^iB_{jk}|_r$$

五、一个微分公式

通过微分,可以证明一个非常有用的公式:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\ln\sqrt{g}) = \Gamma^m_{mk} \tag{3.4-10}$$

式中

$$g = |g_{ij}|$$

这条定理的证明留给读者作为习题.

§3.5 张量方程

张量的解析定义(§1.8)显示了张量的最重要的性质:若某张量的全部分量在一个坐标系中等于0,则在容许变换的其他任何坐标系中,该张量的全部分量也等于0.由于同类型的张量的和、差仍是同类型的张量,由此可以推论,若一个张量方程在某一个坐标系中成立,则在容许变换的所有其他坐标系中,这个方程也成立,亦即张量方程的形式具有不变性.

要使张量方程有意义,则方程中的各项必须是同阶的、同变异的、自由指标也相同的张量.例如形式为

$$C_{rj}B^{jk} = R_{rl}S^{lmn}T_nU^k_m$$

的张量方程在坐标系 x^i 中成立,它有一个自由下标 r 和一个自由上标 k,因此它表示 $3\times3=9$ 个分量方程.当所有的量都集中到等号左边时,这个方程的形式是

$$A_r^{\cdot k}(x^i) = 0$$

当坐标系 x^i 作容许变换到另一个坐标系 $\bar{x}^i$ 时,方程中的量 $A_r^{\cdot k}(x^i)$ 按以下法则变换:

$$\bar{A}_r^{\cdot k}(\bar{x}^i) = A_p^{\cdot q}(x^i)\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q}$$

$\bar{A}_r^{\cdot k}$ 是全部为0的各项之和,因此

$$\bar{A}_r^{\cdot k}(\bar{x}^i) = 0$$

这证明了在一个坐标系中成立的任一张量方程，在另一坐标系中也成立.

这就给人们提供了一种在数学物理中建立方程的十分有力的方法. 例如，若某个张量关系在直角坐标系中被证明是成立的，则在容许变换的任何曲线坐标系中也成立. 因此，要建立一个方程(表示一个物理事实，例如平衡条件、能量守恒等)，只需在直角坐标系中建立(这是比较容易的)，并且以普遍张量的形式表示，则在容许变换的任何曲线坐标系中，这个张量方程也成立.

作为上述特性的一个应用，今讨论张量的高阶协变导数. 设 A_{kl}^{ij} 表示一张量，今考虑它的二阶协变导数 $A_{kl}^{ij}|_{pq}$. 先在直角坐标系中描述张量 A_{kl}^{ij} 的二阶协变导数. 在直角坐标系中，克里斯托费尔符号全部为 0，一个张量的协变导数转变为普通偏导数，而普通偏导数与求导的次序无关，只要它们是连续的，即

$$A_{kl,pq}^{ij} = A_{kl,qp}^{ij}$$

因此，在直角坐标系中，张量方程

$$A_{kl}^{ij}|_{pq} = A_{kl}^{ij}|_{qp} \tag{3.5-1}$$

成立，只要它的每个分量是连续的.

根据张量方程的特性，上述方程在容许变换的任何曲线坐标系都成立. 这表明张量的高阶协变导数在欧几里得空间中与求导次序无关.

另一个应用是证明里奇定理：基本度量张量 g_{ij} 与相伴度量张量 g^{ij} 的协变导数等于 0.

$$g_{ij}|_k = 0, \qquad g^{ij}|_k = 0 \tag{3.5-2}$$

这个定理在 §3.4 中已证明，现在利用张量方程的不变性来证明此定理.

由于 $g_{ij}|_k$ 和 $g^{ij}|_k$ 是张量，因此，只要能指出(3.5-2)式在某个特定的坐标系中成立，则里奇定理的正确性便能成立. 在直角坐标系中

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad g^{ij} = \delta^{ij}$$

因此

$$g_{ij,k} = 0, \quad g^{ij}_{,k} = 0$$

在直角坐标系中，偏导数和协变导数恒等，所以

$$g_{ij}|_k = 0, \qquad g^{ij}|_k = 0$$

它们是张量方程，因此可以推广到容许变换的任何曲线坐标系.

同样，还可以证明置换张量 $\in_{ijk}$，$\in^{ijk}$ 的协变导数等于 0，即

$$\in_{ijk}|_l = 0, \qquad \in^{ijk}|_l = 0 \tag{3.5-3}$$

下面进一步举例说明如何将在直角坐标系中建立的方程变换成以普

遍张量表示的方程,使之在任意其他坐标系也成立.

① 设在直角坐标系中建立了下面的方程:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}+F_x=0\\\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}+F_y=0\\\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+F_z=0\end{aligned}\right\}\tag{3.5-4}$$

这是弹性体的静力平衡方程,在本书§4.2中将作详细讨论.

② 应用求和约定,将上述方程写成指标形式:

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^j}+F_i=0\tag{3.5-5}$$

③ 提升或下降指标,使求和指标一上一下,自由指标在相同位置,即

$$\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial x^j}+F^i=0\tag{3.5-6a}$$

或

$$\frac{\partial\sigma_i^{\cdot j}}{\partial x^j}+F_i=0\tag{3.5-6b}$$

④ 将直角坐标系改为曲线坐标系.这时,将方程中的偏导数改为协变导数,将方程中的直角坐标系的特殊张量 δ_{ij},δ^{ij},e_{ijk},e^{ijk} 分别改为曲线坐标系中相应的特殊张量 g_{ij},g^{ij},$\in_{ijk}$,$\in^{ijk}$.这样,方程(3.5-6)便改为

$$\sigma^{ij}|_j+F^i=0\tag{3.5-7a}$$

或

$$\sigma_i^{\cdot j}|_j+F_i=0\tag{3.5-7b}$$

方程(3.5-7)是以普遍张量表示的方程,在任意曲线坐标系中均成立,因此,有广泛的适用性.

§3.6 梯度、散度、旋度

如果对于坐标 x^i 变化的某一区域 R 中的每一点 $P(x^i)$ 可以一一对应地给定张量分量的值,则这个区域构成一个张量场.例如:

有势力的力函数或势能场是零阶张量场;

力矢量场、速度矢量场等是一阶张量场;

度量张量场是二阶张量场.

本节讨论对构成场的张量所进行的张量分析运算.这些运算公式用张量形式表示.

一、标量场的梯度、哈密顿(Hamilton)算子

在§3.3中已讨论过标量场 $\phi(x^i)$的梯度,它的表示式是

$$\text{grad}\phi \equiv \phi|_k \boldsymbol{g}^k$$

由于(3.3-10)式,上式可写成

$$\text{grad}\phi \equiv \boldsymbol{g}^k \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \equiv \left(\boldsymbol{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\phi$$

上式可以解释为 gradϕ 是某个算子∇对 ϕ 进行运算,即

$$\text{grad}\phi \equiv \nabla \phi$$

这个算子∇称为哈密顿算子,定义为

$$\nabla \equiv \boldsymbol{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3.6-1}$$

这样

$$\text{grad}\phi = \nabla \phi = \left(\boldsymbol{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\phi \equiv \phi|_k \boldsymbol{g}^k \tag{3.6-2}$$

哈密顿算子∇读作耐普拉(nabla)或 del.

在正交曲线坐标系中,∇算子可用单位基矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 表示.由(1.7-5)、(1.7-6)和(1.7-3)式可知

$$\boldsymbol{g}^r = \frac{\boldsymbol{e}_r}{\sqrt{g_{\underline{rr}}}} \quad (r\text{ 不求和})$$

因此,∇算子可表示为

$$\nabla \equiv \sum_{k=1}^{3} \frac{\boldsymbol{e}_k}{\sqrt{g_{\underline{kk}}}} \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3.6-3}$$

gradϕ 是一个矢量场,它的协变分量是标量场 $\phi(x^i)$的协变导数 $\phi|_k$.

二、矢量场的散度

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 div$\boldsymbol{A}$ 定义为

$$\begin{aligned}\text{div}\boldsymbol{A} &\equiv \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{g}^k \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}(A^l \boldsymbol{g}_l) = \boldsymbol{g}^k \cdot \boldsymbol{g}_l A^l|_k \\ &= A^k|_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g} A^k)\end{aligned} \tag{3.6-4}$$

上式中的最后一个等式可推导如下，在推导中利用了(3.4－10)式.

$$A^k|_k=\frac{\partial A^k}{\partial x^k}+\Gamma^k_{km}A^m=\frac{\partial A^k}{\partial x^k}+A^k\frac{\partial}{\partial x^k}(\ln\sqrt{g})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k) \tag{3.6－5}$$

矢量场的散度是一个标量场.

应当注意，哈密顿算子∇是一个矢性微分算子，它的"分量"$\frac{\partial}{\partial x^k}$是矢量的协变分量.∇算子有矢量的某些性质，但不具备矢量的全部性质，因为它是算子.例如$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$是一个标量(称为矢量场$\boldsymbol{A}$的散度)，然而$\boldsymbol{A}\cdot\nabla=A^k\frac{\partial}{\partial x^k}$，这是个标量微分算子.从这个意义来说，∇算子与矢量点乘时不具有可交换性.

三、矢量场的旋度

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度定义为

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{A}\equiv\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{g}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\times(A_l\boldsymbol{g}^l)$$

$$=\boldsymbol{g}^k\times\boldsymbol{g}^lA_l|_k=\in^{klm}A_l|_k\boldsymbol{g}_m \tag{3.6－6}$$

矢量场的旋度是一个矢量场，以 $\boldsymbol{W}$ 表示，则

$$\boldsymbol{W}=\mathrm{curl}\boldsymbol{A}=w^m\boldsymbol{g}_m \tag{3.6－7}$$

$$w^m=\in^{klm}A_l|_k \tag{3.6－8}$$

即矢量 w^m 是矢量 A_l 的旋度；矢量 A_l 的协变导数 $A_l|_k$ 是个二阶张量.旋度是与这个张量的反对称部分联系着的矢量，见§2.2中的讨论.

四、标量场 φ 的梯度的散度、拉普拉斯(Laplace)算子

标量场 ϕ 的梯度的散度定义为

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi)\equiv\nabla\cdot(\nabla\phi)\equiv\nabla^2\phi$$

式中∇^2 称为拉普拉斯算子.由(3.6－1)式可知

$$\nabla^2\phi=\boldsymbol{g}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\cdot\left(\boldsymbol{g}^l\frac{\partial\phi}{\partial x^l}\right)=\boldsymbol{g}^k\cdot\boldsymbol{g}^l\frac{\partial\phi}{\partial x^l}\bigg|_k=\left(g^{kl}\frac{\partial\phi}{\partial x^l}\right)\bigg|_k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kl}\frac{\partial\phi}{\partial x^l}\right)=\phi\Big|^k_k \tag{3.6－9}$$

上式在推导中应用了里奇定理和(3.6－4)式.

五、圆柱坐标系、球坐标系和正交曲线坐标系中的梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子的表示式

在这些表示式中,采用单位基矢量 $e_k = \dfrac{g_k}{\sqrt{g_{\underline{kk}}}}$ 和矢量的物理分量 $A^{(k)} = A^k\sqrt{g_{\underline{kk}}}$.

(一) 圆柱坐标系(r,θ,z)(图 1-4)

$$x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = z$$

由§1.7可知

$$g_{11} = g^{11} = g_{33} = g^{33} = 1,\qquad g_{22} = 1/g^{22} = (x^1)^2 = r^2$$

$$g_{rs} = g^{rs} = 0\quad (r \neq s),\qquad g = (x^1)^2 = r^2$$

由(3.2-2)式得

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{r},\ \Gamma^1_{22} = -x^1 = -r$$

$$\text{其余的 } \Gamma^k_{ij} = 0$$

单位矢量:
$$e_k = \frac{g_k}{\sqrt{g_{\underline{kk}}}}\qquad (k \text{ 不求和})$$

由(3.6-2)~(3.6-4)、(3.6-6)、(3.6-9)式得

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x^k}g^k = g^{kl}\frac{\partial\phi}{\partial x^l}g_k = \sum_{k=1}^{3} g^{kl}\frac{\partial\phi}{\partial x^l}\sqrt{g_{\underline{kk}}}\,e_k \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x^1}e_1 + \frac{1}{x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}e_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3}e_3 \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}e_\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}e_z \end{aligned}\qquad (3.6-10)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{A} &= A^k|_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k) \\ &= \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}\frac{A^{(k)}}{\sqrt{g_{\underline{kk}}}}\right) \\ &= \frac{1}{x^1}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(x^1A^{(1)}) + \frac{\partial A^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x^3}(x^1A^{(3)})\right] \\ &= \frac{1}{x^1}\frac{\partial}{\partial x^1}(x^1A^{(1)}) + \frac{1}{x^1}\frac{\partial A^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial A^{(3)}}{\partial x^3} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned}\qquad (3.6-11)$$

$\mathrm{curl}\boldsymbol{A}=\in^{klm}A_l|_k\boldsymbol{g}_m$，在圆柱坐标系中，此式可表示为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{curl}\boldsymbol{A} &= \sum_{m,n}\frac{\mathrm{e}^{klm}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(g_{ln}\frac{A^{(n)}}{\sqrt{g_{\underline{nn}}}}\right)\sqrt{g_{\underline{mm}}}\boldsymbol{e}_m \\
&= \frac{1}{x^1}\left[\frac{\partial A^{(3)}}{\partial x^2}-\frac{\partial(x^1A^{(2)})}{\partial x^3}\right]\boldsymbol{e}_1+\left[\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x^3}-\frac{\partial A^{(3)}}{\partial x^1}\right]\boldsymbol{e}_2+ \\
&\quad \frac{1}{x^1}\left[\frac{\partial(x^1A^{(2)})}{\partial x^1}-\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x^2}\right]\boldsymbol{e}_3 \\
&= \left[\frac{1}{x^1}\frac{\partial A^{(3)}}{\partial x^2}-\frac{\partial A^{(2)}}{\partial x^3}\right]\boldsymbol{e}_1+\left[\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x^3}-\frac{\partial A^{(3)}}{\partial x^1}\right]\boldsymbol{e}_2+ \\
&\quad \left[\frac{1}{x^1}\frac{\partial(x^1A^{(2)})}{\partial x^1}-\frac{1}{x^1}\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x^2}\right]\boldsymbol{e}_3 \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r+\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta+ \\
&\quad \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
\tag{3.6-12}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\phi &= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}g^{kl}\frac{\partial\phi}{\partial x^l}\right) \\
&= \frac{1}{x^1}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^1\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(x^1\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)\right] \\
&= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^1\partial x^1}+\frac{1}{x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}+\frac{1}{(x^1)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^3\partial x^3} \\
&= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}
\end{aligned}
\tag{3.6-13}
$$

在(3.6-11)、(3.6-12)式的最后一个表示式中，用 A_r、A_θ、A_z 表示矢量的物理分量 $A^{(1)}$、$A^{(2)}$、$A^{(3)}$.

（二）球坐标系(r,φ,θ)(图 1-5)

$$x^1=r,\ x^2=\varphi,\ x^3=\theta$$

$$z^1=r\sin\varphi\cos\theta,\ z^2=r\sin\varphi\sin\theta,\ z^3=r\cos\varphi$$

$$g_{11}=g^{11}=1,\ g_{22}=\frac{1}{g^{22}}=r^2,\ g_{33}=\frac{1}{g^{33}}=r^2\sin^2\varphi$$

$$g_{kl}=g^{kl}=0\qquad(k\neq l)$$

$$g=r^4\sin^2\varphi$$

$$\Gamma^1_{22} = -r, \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\varphi, \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^2_{33} = -\sin\varphi\cos\varphi, \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \Gamma^3_{23} = \cot\varphi$$

其余的 $\Gamma^k_{lm} = 0$

下面的表示式中采用单位基矢量 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\theta$ 和矢量的物理分量 A_r, A_φ, A_θ.

$$\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta \qquad (3.6-14)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi\sin\varphi) + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} \qquad (3.6-15)$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\theta\sin\varphi) - \frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)\right]\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_\theta \qquad (3.6-16)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \qquad (3.6-17)$$

（三）正交曲线坐标系

$$g^{\underline{kk}} = \frac{1}{g_{\underline{kk}}}, \quad \boldsymbol{g}^k = g^{\underline{kk}}\boldsymbol{g}_k, \quad g = g_{11}g_{22}g_{33}$$

Γ^k_{ij} 的表示式见(3.2-2)式.

$$\mathrm{grad}\phi = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\boldsymbol{e}_3 \qquad (3.6-18)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{22}g_{33}}A^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g_{33}g_{11}}A^{(2)}) + \frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g_{11}g_{22}}A^{(3)})\right] \qquad (3.6-19)$$

$$\operatorname{curl}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g_{33}}A^{(3)})-\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g_{22}}A^{(2)})\right]\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g_{11}}A^{(1)})-\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{33}}A^{(3)})\right]\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{22}}A^{(2)})-\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g_{11}}A^{(1)})\right]\boldsymbol{e}_3 \tag{3.6-20}$$

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{g_{33}g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)\right] \tag{3.6-21}$$

§3.7 高斯、斯托克斯积分定理

高斯(Gauss)定理、斯托克斯(Stokes)定理在场论中有重要的作用.高斯定理建立了空间域的三重积分与其边界面上的曲面积分之间的关系.斯托克斯定理把曲面上的曲面积分和它的边界曲线上的曲线积分联系起来.在高等数学教程中已有高斯公式和斯托克斯公式的推导(见四川大学高等数学教研组编,《高等数学》,第二册,人民教育出版社).本节直接引用这些定理的矢量表示式.只讨论如何将它们表示成张量形式.

一、高斯定理

设空间域 V 的边界曲面 S 是光滑的闭曲面.矢量函数 $\boldsymbol{u}$ 在 V 及 S 上具有一阶连续偏导数,S 上的面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的方向为外法向.则

$$\int_V \operatorname{div}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V=\oint_S \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.7-1}$$

这是高斯定理的矢量表示形式.

由(3.6-4)式得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u}=u^i|_i \tag{a}$$

由(1.11-19)式得

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}r^i\,\mathrm{d}s^j\,\mathrm{d}t^k\in_{ijk} \tag{b}$$

将(a)、(b)式代入(3.7-1)式并根据标量积的张量表示式

(1.11－1),可得高斯定理的张量表示形式为

$$\int_V u^l|_l \in_{ijk} dr^i ds^j dt^k = \oint_S u^l dA_l \qquad (3.7-2)$$

(3.7－2)式右端的积分表示矢量 $\boldsymbol{u}$ 通过闭曲面 S 的通量.在流体力学中,$\boldsymbol{u}$ 是流体的速度场,则这个积分就是单位时间内流体由内流出闭曲面 S 的流量.高斯定理也称为散度定理.

二、斯托克斯定理

若光滑曲面 A 的边界为光滑闭曲线 C,矢量函数 $\boldsymbol{u}$ 在 A 及 C 上有一阶连续偏导数,则

$$\oint_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_A \mathrm{curl}\boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{A} \qquad (3.7-3)$$

式中 $d\boldsymbol{s}$ 是边界曲线 C 上的线元矢量,$d\boldsymbol{s}$ 的方向总是这样来选定的,即当人沿 $d\boldsymbol{s}$ 的正方向行走时,曲面 A 恒在其左边(图 3－1).(3.7－3)式是斯托克斯定理的矢量表示式.

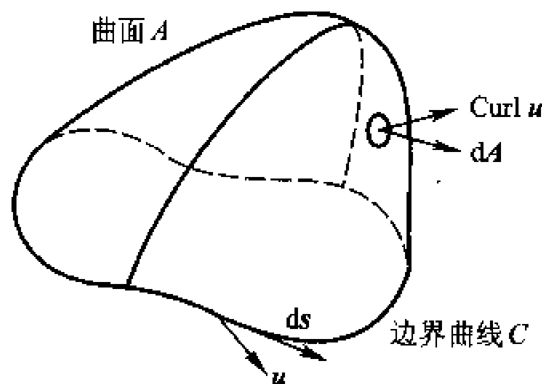


图 3－1

$\mathrm{curl}\boldsymbol{u}$ 是矢量场,可用 $\boldsymbol{W}$ 表示,由(3.6－7)、(3.6－8)式得

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{W} = w^k \boldsymbol{g}_k \qquad (c)$$

$$w^k = \in^{ijk} u_j|_i \qquad (d)$$

根据标量积的张量表示式(1.11－1),将(d)式代入(3.7－3)式,可得斯托克斯定理的张量表示式:

$$\oint_C u_i dx^i = \int_A \in^{ijk} u_j\Big|_i dA_k \qquad (3.7-4)$$

(3.7－4)式左端的积分称为矢量 $\boldsymbol{u}$ 沿曲线 C 的环量.

三、平面格林定理

应用(3.6－4)式及(1.11－1)式,散度定理在直角坐标系中,取如下的形式:

$$\int_V u_{i,i}\mathrm{d}V = \oint_S u_i \mathrm{d}A_i \tag{3.7－5a}$$

或

$$\int_V u_{i,i}\mathrm{d}V = \oint_S u_i n_i \mathrm{d}A \tag{3.7－5b}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为面元 $\mathrm{d}A$ 的单位外法矢.

散度定理(3.7－5)的二维表示式称为平面格林(Green)定理:

$$\int_A \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial u_2}{\partial z_2}\right)\mathrm{d}A = \oint_C (u_1 n_1 + u_2 n_2)\mathrm{d}s \tag{3.7－6}$$

式中,$\boldsymbol{u} = u_1(z_1, z_2)\boldsymbol{e}_1 + u_2(z_1, z_2)\boldsymbol{e}_2$是一个二维矢量场,$C$ 是 z_1-z_2平面上面积 A 的闭边界曲线,$\boldsymbol{n}$ 是曲线 C 上线元 $\mathrm{d}s$ 的单位外法矢,$\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{e}_1 + n_2\boldsymbol{e}_2$.如图 3－2.

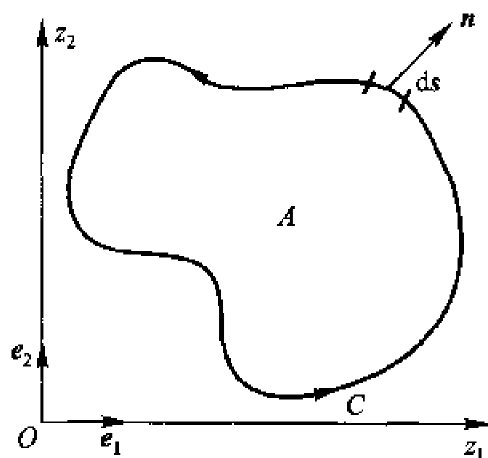


图 3－2

§3.8 黎曼-克里斯托费尔张量

一、黎曼-克里斯托费尔(Riemann－Christoffel)张量

根据微分学的一个定理,混合偏导数的求导次序是可以交换的,即

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2 \partial x^1} \tag{a}$$

这就提出一个问题：在什么条件下，二阶协变导数的求导次序能够交换？即在什么情况下，下式能成立？

$$A_k|_{lm} = A_k|_{ml}$$

为寻求这个问题的答案，取 $A_k|_l$ 的协变导数 $(A_k|_l)|_m$，由

$$A_k|_l = A_{k,l} - A_r\Gamma^r_{kl} \qquad (3.8-1)$$

得

$$(A_k|_l)|_m = A_k|_{lm} = (A_k|_l)_{,m} - A_r|_l\Gamma^r_{km} - A_k|_r\Gamma^r_{ml}$$

利用式(3.8－1)，上式化成

$$A_k|_{lm} = A_{k,lm} - \Gamma^r_{kl,m}A_r - A_{r,m}\Gamma^r_{kl} - A_{r,l}\Gamma^r_{km} + A_s\Gamma^s_{rl}\Gamma^r_{km} - A_{k,r}\Gamma^r_{ml} + A_s\Gamma^s_{kr}\Gamma^r_{ml} \qquad (3.8-2a)$$

若互换指标 l 和 m，则得

$$A_k|_{ml} = A_{k,ml} - \Gamma^r_{km,l}A_r - A_{r,l}\Gamma^r_{km} - A_{r,m}\Gamma^r_{kl} + A_s\Gamma^s_{rm}\Gamma^r_{kl} - A_{k,r}\Gamma^r_{lm} + A_s\Gamma^s_{kr}\Gamma^r_{lm} \qquad (3.8-2b)$$

根据(3.1－6)式，(3.8－2a)式和(3.8－2b)式的最后两项相同；两式相减得

$$A_k|_{lm} - A_k|_{ml} = A_{k,lm} - A_{k,ml} - A_r\Gamma^r_{kl,m} + A_r\Gamma^r_{km,l} - A_{r,m}\Gamma^r_{kl} + A_{r,l}\Gamma^r_{km} - A_{r,l}\Gamma^r_{km} + A_{r,m}\Gamma^r_{kl} + A_s\Gamma^s_{rl}\Gamma^r_{km} - A_s\Gamma^s_{rm}\Gamma^r_{kl}$$

普通偏导数的求导次序可以交换，因此上式右边前两项可消去，其余各项中有两对相消．这样，将最后两项中的指标 r、s 互换后，便得到

$$A_k|_{lm} - A_k|_{ml} = (\Gamma^r_{km,l} - \Gamma^r_{kl,m} + \Gamma^r_{sl}\Gamma^s_{km} - \Gamma^r_{sm}\Gamma^s_{kl})A_r \qquad (3.8-3)$$

上式中，A_r 是任意矢量，而(3.8－3)式左端是一个三阶协变张量．根据商法则，上式右端与 A_r 相乘的括弧中的量必定是一个四阶张量．

$$R^r_{\cdot klm} \equiv \Gamma^r_{km,l} - \Gamma^r_{kl,m} + \Gamma^r_{sl}\Gamma^s_{km} - \Gamma^r_{sm}\Gamma^s_{kl} \qquad (3.8-4)$$

$R^r_{\cdot klm}$ 是一个一阶逆变三阶协变的张量，这个张量称为黎曼－克里斯托费尔张量，或称为混合黎曼－克里斯托费尔张量，或第二类黎曼－克里斯托费尔张量．它与 A_r 的选择无关，并且是由基本度量张量 g_{kl} 及其一、二阶偏导数构成的．为了表明这一点，有时写成 $R^{(g)r}_{\cdot klm}$．于是方程(3.8－3)式可写成

$$A_k|_{lm} - A_k|_{ml} = R^r_{\cdot klm}A_r \qquad (3.8-5)$$

由上式可以得出以下定理：当且仅当黎曼－克里斯托费尔张量 $R^r_{\cdot klm}$ 恒等

于 0 时,协变导数的求导次序可以交换.

(3.8-5)式可以推广到高阶张量.例如,对于二阶张量有

$$A_{kl}|_{mn} - A_{kl}|_{nm} = A_{kr}R^{r}_{\cdot lmn} + A_{rl}R^{r}_{\cdot kmn} \tag{3.8-6}$$

降下黎曼-克里斯托费尔张量的逆变指标,可以定义一个张量,称为曲率张量,或称为协变黎曼-克里斯托费尔张量,或第一类黎曼-克里斯托费尔张量.

$$R_{klmn} = g_{kr}R^{r}_{\cdot lmn} \tag{3.8-7}$$

将(3.8-4)式代入上式,得

$$R_{klmn} = (g_{kr}\Gamma^{r}_{ln})_{,m} - g_{kr,m}\Gamma^{r}_{ln} - (g_{kr}\Gamma^{r}_{lm})_{,n} + g_{kr,n}\Gamma^{r}_{lm} + g_{kr}\Gamma^{s}_{ln}\Gamma^{r}_{sm} - g_{kr}\Gamma^{s}_{lm}\Gamma^{r}_{ns} \tag{3.8-8}$$

二、黎曼-克里斯托费尔张量的性质

利用(3.1-4a)式和(3.1-7)式,(3.8-8)式化为

$$R_{klmn} = \Gamma_{lnk,m} - \Gamma_{lmk,n} + \Gamma_{knr}\Gamma^{r}_{lm} - \Gamma_{kmr}\Gamma^{r}_{ln} \tag{3.8-8a}$$

再利用(3.1-8a)式和(3.1-4b)式,得

$$R_{klmn} = \frac{1}{2}(g_{lk,nm} + g_{nk,lm} - g_{ln,km}) - \frac{1}{2}(g_{lk,mn} + g_{mk,ln} - g_{lm,kn}) + g^{rs}(\Gamma_{lms}\Gamma_{knr} - \Gamma_{lns}\Gamma_{kmr})$$

化简,得曲率张量 R_{klmn} 的表示式为

$$R_{klmn} = \frac{1}{2}(g_{kn,lm} + g_{lm,kn} - g_{km,ln} - g_{ln,km}) + g^{rs}(\Gamma_{lms}\Gamma_{knr} - \Gamma_{lns}\Gamma_{kmr}) \tag{3.8-9}$$

由上式可知

$$R_{klmn} = -R_{lkmn}\ (k \neq l) \tag{3.8-10a}$$

$$R_{klmn} = -R_{klnm}\ (m \neq n) \tag{3.8-10b}$$

$$R_{klmn} = R_{mnkl} \tag{3.8-10c}$$

$$R_{klmn} + R_{kmnl} + R_{knlm} = 0 \tag{3.8-10d}$$

提升(3.8-10d)式中的指标 k,可得出与(3.8-10d)式相似的关于黎曼-克里斯托费尔张量的等式:

$$R^{k}_{\cdot lmn} + R^{k}_{\cdot mnl} + R^{k}_{\cdot nlm} = 0 \tag{3.8-10e}$$

从(3.8-10a)、(3.8-10b)式可以看出,若 $k = l$ 或 $m = n$,则 $R_{klmn} = 0$.

由以上关于 R_{klmn} 的性质可知，R_{klmn} 的全部分量中，不等于 0 的数值不同的分量(不分正负号)可归为三类：R_{klkl}，R_{klkm}，R_{klmn}，其中 k、l、m、n 各不相同. 在三维空间，R_{klmn} 的不等于 0 的不同分量是 R_{1212}、R_{1313}、R_{2323}、R_{1213}、R_{2123}、R_{3132}. 在二维空间，不等于 0 的分量是 R_{1212}.

三、关于欧几里得(Euclid)空间

黎曼－克里斯托费尔张量是空间曲率的一种度量. 在欧几里得空间中，存在着 $g_{kl}=\delta_{kl}$ 的直角坐标系. 在直角坐标系中，$\Gamma^{i}_{jk}=0$，因此黎曼－克里斯托费尔张量的分量等于 0. 张量在一个坐标系中全部分量等于 0，则在容许变换的其他坐标系中都等于 0. 这样，黎曼－克里斯托费尔张量等于 0 是 n 维空间为欧几里得空间的必要和充分条件.

若在某个空间，黎曼－克里斯托费尔张量不等于 0，则这个空间是黎曼空间. 在黎曼空间中，协变导数的求导次序是不可交换的.

二维欧几里得空间的最简单的例子是平面. 可展曲面(柱面、锥面)也是二维欧几里得空间. 二维欧几里得空间的总曲率(高斯曲率)为 0，称为"平坦"(Flat)空间. 不可展曲面是二维黎曼空间，二维黎曼空间是"弯曲"(Curved)空间. 这种曲面的总曲率 K 不等于 0，它是两个主曲率 $1/R_1$、$1/R_2$ 的乘积，它与黎曼－克里斯托费尔张量有关：

$$K=\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}$$

$$R_{1212}=\left[g_{11}g_{22}-g_{12}^2\right]K=gK$$

因此黎曼－克里斯托费尔张量是空间曲率的一种度量，称为曲率张量.

大多数工程问题都是欧几里得空间的问题，但是工程师也常处理非欧几里得空间的问题. 例如弹性薄壳理论是以薄壳中面弯曲微分方程来表示薄壳的弯曲特性的，若薄壳中面是不可展曲面，则不可能在这个曲面上建立一个坐标系使得 g_{ij} 处处为常数. 因此这是一个非欧几里得空间的问题. 但是，可以将二维非欧几里得空间转变为三维欧几里得空间的子空间，只需引进 g_3(单位基矢量)，g_3 与 g_α($\alpha=1,2$)正交，这样，$g_{13}=g_{23}=0$，$g_{33}=1$.

§ 3.9 两点张量场

一、两点张量

两点张量的定义：在分别描述物体变形后和未变形状态的两个坐标

系 x^k 与 X^K(将在§5.1详细讨论)分别进行以下的容许变换时:

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x), \quad \bar{X}^K = \bar{X}^K(X) \tag{3.9-1}$$

若一个量 $A^k_K(x,X)$ 像张量那样对于指标 k 和 K 进行变换

$$\bar{A}^k_K(\bar{x},\bar{X}) = A^m_M(x,X)\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}\frac{\partial X^M}{\partial \bar{X}^K} \tag{3.9-2}$$

则 $A^k_K(x,X)$ 称为两点张量.这个张量是坐标系 x^k 中的点及坐标系 X^K 中的点的函数,因此称为两点张量.两点张量的指标也可以都是逆变指标,如 $A^{kK}(x,X)$;或两个指标都是协变指标,如 $A_{kK}(x,X)$.

今举例说明两点张量场.

例1 移位子

移位子定义如下

$$g^k_K(x,X) = \boldsymbol{g}^k(x)\cdot\boldsymbol{G}_K(X) \tag{3.9-3}$$

$$g^K_k(x,X) = \boldsymbol{G}^K(X)\cdot\boldsymbol{g}_k(x) \tag{3.9-4}$$

上式中 $\boldsymbol{g}_k(x)$,$\boldsymbol{G}_K(X)$ 分别是曲线坐标系 x^k 和 X^K 的基矢量;$\boldsymbol{g}^k(x)$,$\boldsymbol{G}^K(X)$ 分别是上述曲线坐标系的逆变基矢量.移位子是两点张量场.

矢量 $\boldsymbol{u}$(例如可变形体中一点的位移矢量)的一端在坐标系 X^K 中(未变形状态),另一端在坐标系 x^k 中(变形后状态),则矢量 $\boldsymbol{u}$ 可以沿 $\boldsymbol{g}_k$ 分解成分量,也可以沿 $\boldsymbol{G}_K$ 分解成分量,

$$\boldsymbol{u} = u^k\boldsymbol{g}_k = u^K\boldsymbol{G}_K$$

u^k 与 u^K 之间的关系如下.将 $\boldsymbol{G}^L$ 点乘上式得

$$u^k\boldsymbol{g}_k\cdot\boldsymbol{G}^L = u^K\boldsymbol{G}_K\cdot\boldsymbol{G}^L$$

$$u^k g^L_k = u^K\delta^L_K = u^L$$

把指标 L 换成 K,则得

$$u^K = g^K_k u^k \tag{3.9-5a}$$

同理可得

$$u^k = g^k_K u^K \tag{3.9-5b}$$

$$u_K = g^k_K u_k \tag{3.9-5c}$$

$$u_k = g^K_k u_K \tag{3.9-5d}$$

由此可知:一个矢量在两个坐标系 x^k 和 X^K 中的分量,通过移位子这个两点张量而互相转换.若两个坐标系是重合的或平行的直角坐标系,则 $g^k_K = \delta^k_K$,$g^K_k = \delta^K_k$.因此 $u^K = \delta^K_k u^k$,$u^k = \delta^k_K u^K$.即在两个平行的直角坐标系中,矢量 $\boldsymbol{u}$ 的分量是相同的.

例 2 变形梯度

设坐标系 X^K 与 x^k 以映射相联系 $x^k = x^k(X^K)$，$X^K = X^K(x^k)$，则变形梯度的定义是

$$x^k_{,K}(X) \equiv \frac{\partial x^k}{\partial X^K}, \quad x^K_{,k}(x) \equiv \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \qquad (3.9-6)$$

为了说明 $x^k_{,K}$ 的两点张量性质，按(3.9－1)式变换坐标，由求导数的链式法则得

$$\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{X}^K} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial X^M}\frac{\partial X^M}{\partial \bar{X}^K} = \frac{\partial x^m}{\partial X^M}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}\frac{\partial X^M}{\partial \bar{X}^K} \qquad (3.9-7)$$

上式与(3.9－2)式的形式一样，因此变形梯度是两点张量．对于 $X^K_{,k}$ 可作类似的分析．

变形梯度描述物质点的邻域的变形．关于变形梯度的概念将在第五章进一步讨论．

二、两点张量场的全协变微分法

标量函数 $\phi(x, X)$ 是坐标 x 与 X 的函数．坐标 x 与 X 以映射 $x = x(X)$ 相联系，则 ϕ 的全导数是

$$\frac{d\phi}{dX} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dX} + \frac{\partial \phi}{\partial X}$$

这在微分学中已讨论过．这个法则可以推广到两点张量场．由于它是张量，所以用协变导数的概念；由于它是两个变量的函数，所以用全导数的概念．因此，称为两点张量场的全协变微分法．

两点张量场的全协变微分法的定义：当 x^k 与 X^K 由映射 $x^k = x^k(X^K)$ 相联系时，两点张量场 $A^k_K(x, X)$ 的全协变微分法定义为

$$A^k_{,K:L} \equiv A^k_K|_L + A^k_K|_l x^l_{,L} \qquad (3.9-8)$$

式中

$$A^k_K|_L = \frac{\partial A^k_K}{\partial X^L} - \Gamma^M_{LK} A^k_M \quad （认为\ x\ 固定）$$

$$A^k_K|_l = \frac{\partial A^k_K}{\partial x^l} + \Gamma^k_{lm} A^m_K \quad （认为\ X\ 固定）$$

因此

$$A^k_{K:L} = \frac{\partial A^k_K}{\partial X^L} - \Gamma^M_{LK} A^k_M + \left(\frac{\partial A^k_K}{\partial x^l} + \Gamma^k_{lm} A^m_K\right)\frac{\partial x^l}{\partial X^L} \qquad (3.9-9)$$

作为例题，将全协变微分法(3.9－9)式应用于变形梯度 $x^k_{,K}(X)$，可得

$$(x^k_{,K})_{:L} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial X^L \partial X^K} - \Gamma^M_{LK}\frac{\partial x^k}{\partial X^M} + \Gamma^k_{lm}\frac{\partial x^m}{\partial X^K}\frac{\partial x^l}{\partial X^L} \tag{3.9-10}$$

全协变微分法服从协变微分的形式法则，例如

$$(A^k_K B^L_l)_{:M} = A^k_{K:M} B^L_l + A^k_K B^L_{l:M} \tag{3.9-11}$$

和方程(3.4-7)、(3.4-8)一样，度量张量和移位子的全协变导数等于0，即

$$g_{kl:M} = g^k_{K:M} = G_{KL:m} = 0 \tag{3.9-12}$$

由此可知，度量张量和移位子就像常数一样可以移到全协变微分符号之内或之外，即

$$(g^k_K A^K_l)_{:m} = g^k_K A^K_{l:m}$$
$$(g^{kl} A^K_l)_{:m} = g^{kl} A^K_{l:m}$$

习　题

1. 求证：在正交曲线坐标系中克里斯托费尔符号 Γ_{ijk} 及 Γ^k_{ij} 如(3.2-1)～(3.2-2)式所示.

2. 求证：克里斯托费尔符号 Γ_{ijk}，Γ^k_{ij} 的变换法则如(3.1-9)和(3.1-10)式所示.

3. 计算平面极坐标($x^1 = r, x^2 = \theta$)的克里斯托费尔符号.

4. 求证：圆柱坐标系的克里斯托费尔符号 Γ_{ijk} 和 Γ^k_{ij} 如(3.2-3)和(3.2-4)式所示.

5. 求证：球坐标系的克里斯托费尔符号 Γ_{ijk}，Γ^k_{ij} 如(3.2-5)和(3.2-6)式所示.

6. 已知：

$$g = |g_{ij}|$$

求证：$\dfrac{\partial}{\partial x^k}(\ln\sqrt{g}) = \Gamma^m_{mk}$.

7. 已知：算符

$$\nabla = g^k\frac{\partial}{\partial x^k},\quad g = |g_{ij}|$$

求证：$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \boldsymbol{g}^k\dfrac{\partial\phi}{\partial x^k}$

$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A} = A^k|_k = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k)$

$\mathrm{curl}\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \in^{klm}A_l|_k\boldsymbol{g}_m$

并证明：当坐标变换时这些函数是不变量.

8. 求证:在正交曲线坐标系中,gradϕ,div$\boldsymbol{A}$,curl$\boldsymbol{A}$,$\nabla^2\phi$ 如(3.6-18)~(3.6-21)式所示.

9. 求证:在圆柱坐标系中,gradϕ,div$\boldsymbol{A}$,curl$\boldsymbol{A}$,$\nabla^2\phi$ 如(3.6-10)~(3.6-13)式所示.这些表示式采用单位基矢量 $\boldsymbol{e}_k=\dfrac{\boldsymbol{g}_k}{\sqrt{g_{kk}}}$ 和物理分量 $A^{(k)}=A^k\sqrt{g_{kk}}$.

10. 求证:在球坐标系中,gradϕ,div$\boldsymbol{A}$,curl$\boldsymbol{A}$,$\nabla^2\phi$ 如(3.6-14)~(3.6-17)式所示.与上题相同,采用单位基矢量和物理分量.

11. 已知:$\phi(x^1,x^2,x^3)$为标量场,g^{ij}是相伴度量张量.求证:

(a) $g^{ij}\phi|_{ij}$是标量场;

(b) 在直角坐标系中 $g_{ij}=\delta_{ij}$,标量场 $g^{ij}\phi|_{ij}$ 转换成如下形式($x^1=x,x^2=y,x^3=z$):

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

(c) 在曲线坐标系中,以标量场 $\phi(x^1,x^2,x^3)$为未知量的拉普拉斯方程如下式:

$$g^{ij}(x^1,x^2,x^3)\phi(x^1,x^2,x^3)|_{ij}=0$$

12. 求证:在球坐标系中,以标量 $\psi(r,\phi,\theta)$为未知函数的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}=0$$

13. 已知:$A^i(z^1,z^2,z^3)$为一个未知矢量在直角坐标系中的分量,每个分量均满足直角坐标系中的拉普拉斯方程.

$$\frac{\partial^2A^i}{(\partial z^1)^2}+\frac{\partial^2A^i}{(\partial z^2)^2}+\frac{\partial^2A^i}{(\partial z^3)^2}=0$$

求证:在曲线坐标系 x^1,x^2,x^3中,$A^i(x^1,x^2,x^3)$满足下列三个微分方程式

$$g^{km}A^i|_{km}=0$$

式中 $A^i|_{km}$是$A^i(x^1,x^2,x^3)$的二阶协变导数.

14. 求证:标量场 $\psi(x^1,x^2,x^3)$的拉普拉斯算子为

$$\nabla^2\psi=g^{ij}\psi|_{ij}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left[\sqrt{g}g^{ij}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x^j}\right)\right]}{\partial x^i}$$

15. 求证:和及积求协变导数的定律与求偏导数的定律相同.即

$$(\phi v^r)|_i=\phi_{,i}v^r+\phi v^r|_i$$

$$(v^rv_r)_{,i}=(v^rv_r)_{,i}=v^r|_iv_r+v^rv_r|_i$$

$$(A_{ij}B^{mn})|_r=A_{ij}|_rB^{mn}+A_{ij}B^{mn}|_r$$

16. 计算二阶张量的二阶协变导数:$A^{ij}|_{kl}$和$A^i_{\cdot j}|_{kl}$.二阶(或高阶)张量的高阶协变导数如何演算?试举例说明.

17. 利用平面格林定理,证明:

$$\int_A\left(r\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+2\sigma_{r\theta}+\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}A=\oint_C(r\sigma_{r\theta}n_r+r\sigma_{\theta\theta}n_\theta)\mathrm{d}s$$

式中 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_rn_r+\boldsymbol{e}_\theta n_\theta$是边界闭曲线$C$的单位外法矢,$(r,\theta)$是平面极坐标.

第二篇
弹性力学基本方程

弹性力学是研究弹性固体在外力作用下所产生的应力和变形的学科.弹性力学又称弹性理论.

弹性力学是力学的一个分支,牛顿力学的基本原理构成本学科的理论体系的基础.

弹性力学引用两个关于讨论对象(固体)的性质的基本假设.

1. 连续性假设　所谓连续性假设即撇开物质的分子结构,假设整个物体的体积都被组成这个物体的物质所充满,并认为物体内任何一点的力学量(如应力、位移、应变等)都是质点坐标的单值连续函数.这就可以引用场的概念,如应力场、位移场、应变场等.

2. 完全弹性假设　完全弹性是指物体在外力作用下产生变形,外力卸去后物体恢复到原来状态,没有残余变形;通常还假设在变形过程中应力与应变成正比.

弹性力学的理论体系就是建立在牛顿力学的基本原理和连续性假设及完全弹性假设的基础上.

此外,经典弹性理论还引进一些假设.如:(1)均匀性假设,即物体各点的弹性性质相同;(2)各向同性假设,即物体每一点的各个方向上的弹性性质相同;(3)小变形假设,即略去应变表示式中位移偏导数的二次项;(4)无初应力假设,即不受外力作用时,物体内部没有应力,也没有应变.但这些假设不是弹性力学理论体系的带根本性的假设.

在第二篇中讨论弹性力学的基本理论——应力分析、应变分析、应力-应变关系和方程的综合,重点放在用普遍张量记法推导弹性力学基本方程.其目的,一方面是为读者进一步学习弹性力学的专门问题和方法打下理论基础;另一方面是使读者熟悉张量分析的应用.由于采用普遍张量记法,使得本篇内容的陈述简洁,而得出的弹性力学基本方程却具有普遍性,适用于各种坐标系.

第四章　应力分析

§4.1　应力张量的概念

一、应力张量

应力是弹性力学中最重要的物理概念.

为了定义应力张量,需要利用一个大小和方向都是任意的面元.现从受力物体中任意点 P 的邻近截取一个微四面体元,它的棱是经过点 P 的坐标曲线上的线元矢量 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$ 以及线元矢量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BC}$(图 4-1).

图　4-1

$$\overrightarrow{PA}=\mathrm{d}\boldsymbol{a},\overrightarrow{PB}=\mathrm{d}\boldsymbol{b},\overrightarrow{PC}=\mathrm{d}\boldsymbol{c}$$
$$\overrightarrow{AB}=\mathrm{d}\boldsymbol{r},\overrightarrow{AC}=\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

ABC 就是所要考虑的面元,以矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{4.1-1}$$

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}\boldsymbol{b}-\mathrm{d}\boldsymbol{a}$,$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}\boldsymbol{c}-\mathrm{d}\boldsymbol{a}$,(4.1-1)式可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\mathrm{d}\boldsymbol{b}-\mathrm{d}\boldsymbol{a})\times(\mathrm{d}\boldsymbol{c}-\mathrm{d}\boldsymbol{a})$$

$$= \frac{1}{2}(d\boldsymbol{b} \times d\boldsymbol{c} + d\boldsymbol{c} \times d\boldsymbol{a} + d\boldsymbol{a} \times d\boldsymbol{b})$$

三个线元矢量 $d\boldsymbol{a}$，$d\boldsymbol{b}$，$d\boldsymbol{c}$ 分别在基矢量 $\boldsymbol{g}_1$、$\boldsymbol{g}_2$、$\boldsymbol{g}_3$ 的方向，它们都只有一个不为零的逆变分量，

$$d\boldsymbol{a} = da^1\boldsymbol{g}_1, \quad d\boldsymbol{b} = db^2\boldsymbol{g}_2, \quad d\boldsymbol{c} = dc^3\boldsymbol{g}_3 \tag{4.1-2}$$

因此 $d\boldsymbol{A}$ 表示式中的三个矢量积分别指向 $\boldsymbol{g}^1$、$\boldsymbol{g}^2$、$\boldsymbol{g}^3$ 的方向.

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{A} &= \frac{1}{2}(db^2dc^3 \in_{231}\boldsymbol{g}^1 + dc^3da^1 \in_{312}\boldsymbol{g}^2 + da^1db^2 \in_{123}\boldsymbol{g}^3) \\ &= dA_i\boldsymbol{g}^i \end{aligned} \tag{4.1-3}$$

式中

$$\begin{aligned} dA_1 &= \frac{1}{2} \in_{123} db^2dc^3 \\ dA_2 &= \frac{1}{2} \in_{123} dc^3da^1 \\ dA_3 &= \frac{1}{2} \in_{123} da^1db^2 \end{aligned} \tag{4.1-3a}$$

另一方面，三角形面元 PAB 可以由它的外法向矢量表示为

$$\frac{1}{2}d\boldsymbol{b} \times d\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}db^2da^1 \in_{213}\boldsymbol{g}^3 = -dA_3\boldsymbol{g}^3 \tag{a}$$

类似的表示式对三角形面元 PBC 和 PCA 也成立.这样，将上式和(4.1-3)、(4.1-3a)式比较可以看出，表示面元 PAB、PBC、PCA 的外法向矢量与作为 $d\boldsymbol{A}$ 的协变分量的 dA_i 的方向相反.

设作用在四面体元的各面元上的力矢量分别为 $d\boldsymbol{P}$、$d\boldsymbol{Q}$、$d\boldsymbol{R}$ 和 $d\boldsymbol{F}$.这四个力分别和它们作用的面元的面积成正比，并且可以沿 $\boldsymbol{g}_j$ 方向分解成逆变分量，则

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{P} &= dP^j\boldsymbol{g}_j = -\sigma^{1j}dA_1\boldsymbol{g}_j \\ d\boldsymbol{Q} &= dQ^j\boldsymbol{g}_j = -\sigma^{2j}dA_2\boldsymbol{g}_j \\ d\boldsymbol{R} &= dR^j\boldsymbol{g}_j = -\sigma^{3j}dA_3\boldsymbol{g}_j \\ d\boldsymbol{F} &= dF^j\boldsymbol{g}_j \end{aligned} \tag{4.1-4}$$

前三个矢量方程确定了 9 个分量 σ^{ij}. $\sigma^{ij}dA_i$ 是力的分量，这些分量与传递它们的面积大小有关.

四面体元 $PABC$ 的平衡，要求作用于它上面的各力矢量之和为 0，即

$$d\boldsymbol{F} + d\boldsymbol{P} + d\boldsymbol{Q} + d\boldsymbol{R} = 0$$

由此可得

$$dF = -dP - dQ - dR = \sigma^{ij} dA_i g_j = dF^j g_j \qquad (4.1-5)$$

$$(dF^j - \sigma^{ij} dA_i) g_j = 0$$

由于 g_j 线性无关,因此

$$dF^j - \sigma^{ij} dA_i = 0$$

即

$$dF^j = \sigma^{ij} dA_i \qquad (4.1-6)$$

由于 dF^j 是矢量;dA_i 是任意矢量,则由商法则可知 σ^{ij} 是一个二阶张量,这就是应力张量.应力张量表示一点的应力状态.

二、σ^{ij} 和 σ^{ji} ($i \neq j$) 的关系

在直角坐标系中,基矢量 g_i 是单位矢量 i_1、i_2、i_3,这样,(4.1-6)式定义的应力张量 σ^{ij} 就是通常在工程中使用的应力分量:$\sigma^{11} = \sigma_x$,$\sigma^{12} = \tau_{xy}$,…….由于 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$,这就提出一个问题:在曲线坐标系中,σ^{ij} 和 σ^{ji} ($i \neq j$) 之间是否也有类似的关系?为了解答这个问题,现讨论图 4-2 所示的六面体元的力矩平衡条件.六面体元的三边是线元矢量 da、db、dc,$da = da^i g_i$,$db = db^j g_j$,$dc = dc^k g_k$.

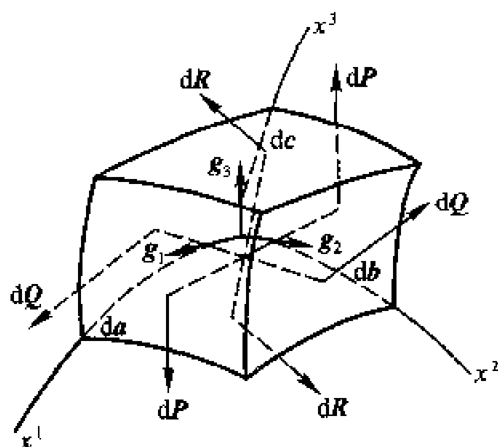


图 4-2

作用在六面体元的三组相对面元上的力分别是

$$dP = dP^m g_m = \sigma^{lm} db^j dc^k \in_{jkl} g^m$$

$$dQ = dQ^m g_m = \sigma^{lm} dc^k da^i \in_{kil} g^m$$

$$dR = dR^m g_m = \sigma^{lm} da^i db^j \in_{ijl} g^m$$

在六面体的三组相对的面元上,作用有大小相等方向相反的三对力,它们形成三个力偶,分别有力矩:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}\times\mathrm{d}\boldsymbol{P}=\mathrm{d}a^i\mathrm{d}P^m\in_{imn}\boldsymbol{g}^n=\sigma^{lm}\mathrm{d}a^i\mathrm{d}b^j\mathrm{d}c^k\in_{jkl}\in_{imn}\boldsymbol{g}^n$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{b}\times\mathrm{d}\boldsymbol{Q}=\mathrm{d}b^j\mathrm{d}Q^m\in_{jmn}\boldsymbol{g}^n=\sigma^{lm}\mathrm{d}a^i\mathrm{d}b^j\mathrm{d}c^k\in_{kil}\in_{jmn}\boldsymbol{g}^n$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{c}\times\mathrm{d}\boldsymbol{R}=\mathrm{d}c^k\mathrm{d}R^m\in_{kmn}\boldsymbol{g}^n=\sigma^{lm}\mathrm{d}a^i\mathrm{d}b^j\mathrm{d}c^k\in_{ijl}\in_{kmn}\boldsymbol{g}^n$$

六面体元的平衡条件要求这三个力矩之和为0.这个合力矩是一个矢量,可以表示为 $\boldsymbol{M}=M_n\boldsymbol{g}^n$.由于 $\boldsymbol{g}^n$ 线性无关,因此 $\boldsymbol{M}=0$ 必然是每个分量 M_n 为0,即

$$\sigma^{lm}\mathrm{d}a^i\mathrm{d}b^j\mathrm{d}c^k(\in_{jkl}\in_{imn}+\in_{kil}\in_{jmn}+\in_{ijl}\in_{kmn})=0 \tag{4.1-7}$$

上式对 $n=1,2,3$ 分别成立.上式中有5个哑指标,因此,有 $3^5=243$ 项,但其中多数项为0.为避免检查非零项的冗长工作,可采用图4-2描述的那些线元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{b}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{c}$,这样可使讨论简化,也不失其普遍意义.这样,便恒有 $i=1,j=2,k=3$.对于 $n=1$,(4.1-7)式简化为

$$\sigma^{lm}(\in_{23l}\in_{1m1}+\in_{31l}\in_{2m1}+\in_{12l}\in_{3m1})=0$$

括弧中的第一项为0,因为 $\in_{1m1}=0$;对于另二项,只剩下两种选择:或者是 $l=2,m=3$;或者是 $l=3,m=2$.因而在原来需要大量求和的项中,剩下的不过是

$$\sigma^{23}\in_{312}\in_{231}+\sigma^{32}\in_{123}\in_{321}=0$$

式中四个置换张量的分量,前三个为正,最后一个为负,因此

$$\sigma^{23}-\sigma^{32}=0$$

即

$$\sigma^{23}=\sigma^{32}$$

在(4.1-7)式中,依次取 $n=2,n=3$,则可以证明

$$\sigma^{31}=\sigma^{13},\sigma^{12}=\sigma^{21}$$

这就证明了应力张量是对称张量这一重要的性质,即

$$\sigma^{ij}=\sigma^{ji}(i\neq j) \tag{4.1-8}$$

三、过一点的任意面元上的应力矢量

在一点P的邻域取一面元,该面元矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 可以由单位外法向矢量 $\boldsymbol{n}$(图4-1)表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}A=n_i\boldsymbol{g}^i\mathrm{d}A$$

式中 $\mathrm{d}A$ 为面元 ABC 的面积的大小.将(4.1-3)式代入上式,得

$$\mathrm{d}A_i\boldsymbol{g}^i=n_i\mathrm{d}A\boldsymbol{g}^i$$

由此得

$$dA_i = n_i dA \tag{4.1-9}$$

若作用在面元 ABC 上的应力矢量为 $\boldsymbol{P}$，则该面元上的力矢量为

$$d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}dA = P^j \boldsymbol{g}_j dA$$

将上式代入(4.1－5)式，并利用(4.1－9)式，得

$$P^j \boldsymbol{g}_j dA = \sigma^{ij} dA_i \boldsymbol{g}_j = \sigma^{ij} n_i dA \boldsymbol{g}_j$$

用 $\boldsymbol{g}^k$ 点乘上式左端和右端，更换指标，简化得

$$P^j = \sigma^{ij} n_i \tag{4.1-10}$$

当面元 dA 无限趋近 P 点，(4.1－10)式表示经过该点的，外法矢为 $\boldsymbol{n}$ 的面元上的应力矢量，若该点的应力张量 σ^{ij} 已知，(4.1－10)称为柯西(Cauchy)公式.

四、应力张量的混合分量

以上讨论了应力张量的逆变分量 σ^{ij}. 若与(4.1－4)式不一样，将 $d\boldsymbol{P}$、$d\boldsymbol{Q}$、$d\boldsymbol{R}$ 和 $d\boldsymbol{F}$(图 4－1)分解成协变分量，如

$$d\boldsymbol{P} = dP_j \boldsymbol{g}^j = \sigma_j^{\ 1} dA_1 \boldsymbol{g}^j$$

等，则可以得到应力张量的混合分量 $\sigma_j^{\cdot i}$. σ^{ij} 与 σ_j^i 是通过度量张量相联系的：

$$\sigma_j^{i\cdot} = \sigma^{ik} g_{kj}$$

当然，也还可以定义应力张量的其他形式的分量

$$\sigma_j^{\cdot i} = \sigma^{ki} g_{jk}$$

由于 $\sigma^{ik} = \sigma^{ki}$[(4.1－8)式]，所以有

$$\sigma_j^{i\cdot} = \sigma_j^{\cdot i} = \sigma_j^i \tag{4.1-11}$$

σ^{ij} 所在的面元是沿坐标曲线的基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 方向截取的，同时这个面元各边上的力也是沿着 $\boldsymbol{g}_i$ 的方向分解为分量的. 因此这些分量是在平衡条件(4.1－5)式中出现的那些分量(图 4－3)，所以逆变分量 σ^{ij} 表示的应力张量最有实用价值. 应力张量的混合分量 σ_j^i 在实际应用时也有价值. 例如以后将看到，当把广义胡克(Hooke)定律用应力张量和应变张量的混合分量表示时，广义胡克定律取最简单的形式. 至于应力张量的协变分量 σ_{ij} 的实用价值不大，本书不讨论.

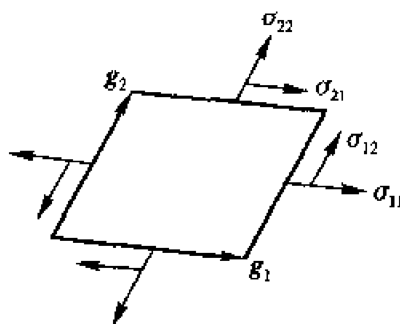


图 4－3

必须注意：在曲线坐标系中，应力张量 σ^{ij} 的量纲与通常工程意义上

的正应力和剪应力(或称切应力)的量纲(M/LT²)是不一致的.由(4.1-5)式可以看出:面元 dA 上的力 $d\boldsymbol{F}$(以真正的力单位表示)是将 σ^{ij} 与 dA_i 相乘(这并不是力的量纲)之后,再与基矢量 $\boldsymbol{g}_j$(这不是单位矢量,它可以有量纲)相乘才是力,所以 σ^{ij} 只是在张量力学的概念内尽可能接近通常工程上的应力概念的一些量.当然,在直角坐标系中,σ^{ij} 与通常工程上的应力量纲一致.

五、应力张量的变换法则

应力张量 σ^{ij}、σ^i_j 是二阶张量,因此当坐标变换时,应力张量服从张量的变换法则.

设坐标系 x^i 作容许变换为另一新坐标系 $\bar{x}^i$,则应力张量 σ^{ij}、σ^i_j,分别按以下的法则变换:

$$\bar{\sigma}^{ij}(x)=\sigma^{kl}(x)\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l} \tag{4.1-12}$$

$$\bar{\sigma}^i_j(\bar{x})=\sigma^k_l(x)\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j} \tag{4.1-13}$$

若坐标系为直角坐标系 z^i,通过坐标轴旋转变换为另一直角坐标系 $z^{i'}$,变换方程为

$$\bar{z}^{i'}=\alpha^{i'}_j z^j \tag{4.1-14}$$

则应力张量的变换法则为

$$\bar{\sigma}^{i'j'}(\bar{z})=\sigma^{kl}\alpha^{i'}_k\alpha^{j'}_l \tag{4.1-15}$$

直角坐标系中,张量的逆变分量与协变分量的差别消失,因此,所有的指标可以写成下标,这样,(4.1-14)、(4.1-15)式可写成

$$\bar{z}_{i'}=\alpha_{i'j}z_j \tag{4.1-16}$$

$$\bar{\sigma}_{i'j'}(\bar{z})=\sigma_{kl}\alpha_{i'k}\alpha_{j'l} \tag{4.1-17}$$

§4.2 平衡方程

一、平衡方程-物体内部

设物体 τ 在给定的体力 F^i 和表面力 P^i 作用下处于平衡状态.由于物体各部分均处于平衡状态,因此作用在 τ 的任一子区域 V 上的所有力的合力和合力矩等于0.所有的力沿任一方向的合力等于0的条件是

$$\int_V F^i \lambda_i \mathrm{d}\tau + \int_S P^i \lambda_i \mathrm{d}A = 0 \qquad (4.2-1)$$

式中 λ_i 为任一给定方向的单位矢量；S 为子区域 V 的边界曲面.

将 P^i 的表示式(4.1－10)式代入(4.2－1)式，得

$$\int_V F^i \lambda_i \mathrm{d}\tau + \int_S \sigma^{ij} n_j \lambda_i \mathrm{d}A = 0 \qquad (4.2-1a)$$

设体力 F^i 是连续函数，力矢量 P^i 有连续的一阶偏导数. 将高斯散度定理(3.7－2)式应用于(4.2－1a)式中的曲面积分，则得

$$\int_V [F^i \lambda_i + (\sigma^{ij} \lambda_i)|_j] \mathrm{d}\tau = 0$$

由于 λ_i 是一个平行的单位矢量场，$\lambda_i|_j = 0$，因此上式可写成

$$\int_V (F^i + \sigma^{ij}|_j) \lambda_i \mathrm{d}\tau = 0$$

上式中被积函数是连续函数；λ_i 的方向是任意的，因此可以得出结论：在物体 τ 内的每一点 P 有

$$\sigma^{ij}|_j + F^i = 0 \qquad (4.2-2)$$

应用体力和表面力的合力矩等于 0 的条件，可得

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \qquad (4.2-3)$$

上式即(4.1－8)式，它在§4.1 中已被证明.

二、平衡方程－物体表面

若从受力物体表面的邻近截取一个微分四面体元(图 4－1)，ABC 是物体表面上的面元，作用在该面元上的表面力矢量为 P^i，则由(4.1－10)式得

$$P^i = \sigma^{ij} n_j \qquad (4.2-4)$$

此式便是物体邻近表面的微体元的平衡方程. 若表面力 P^i 给定，则(4.2－4)式称为力边界条件.

三、由以上的讨论可以作出的结论

若物体在给定的体力 F^i 和表面力 P^i 作用下平衡，则在物体内每一点的应力张量 σ^{ij} 满足以下的偏微分方程组：

$$\sigma^{ij}|_j + F^i = 0 \qquad (4.2-2)$$

式中 $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$；在给定表面力矢量 P^i 的那一部分表面 S_1，应力张量 σ^{ij} 满足平衡方程

$$\sigma^{ij} n_j = P^i \tag{4.2-4}$$

式中 n_j 是 S_1 的外法向单位矢量.(4.2-2)式和(4.2-4)式是张量方程,它们在任何曲线坐标系都成立.

四、直角坐标系中的平衡方程

在直角坐标系中,平衡方程(4.2-2)式可写成

$$\sigma^{ji}_{,j} + F^i = 0 \tag{4.2-5}$$

将(4.2-5)、(4.2-4)式写成分量形式,则物体内部的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial x^3} + F^1 = 0 \\
\frac{\partial \sigma^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial x^3} + F^2 = 0 \\
\frac{\partial \sigma^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial x^3} + F^3 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.2-6}$$

物体表面的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}
P^1 = \sigma^{11} n_1 + \sigma^{12} n_2 + \sigma^{13} n_3 \\
P^2 = \sigma^{21} n_1 + \sigma^{22} n_2 + \sigma^{23} n_3 \\
P^3 = \sigma^{31} n_1 + \sigma^{32} n_2 + \sigma^{33} n_3
\end{aligned}\right\} \tag{4.2-7}$$

必须指出,在(4.2-6)、(4.2-7)式中,所有的指标,都可写成下标.

§4.3 应力张量的主方向、主值、不变量

在受力物体内过一点的任意面元 d$\boldsymbol{A}$ 上的力矢量 d$\boldsymbol{F}$ 是(见 4.1-6 式)

$$\mathrm{d}F^j = \sigma^{ij} \mathrm{d}A_i$$

即过一点的任意面元 d$\boldsymbol{A}$ 上的力矢量是由该点的应力张量的 9 个分量 σ^{ij} 确定的.这就提出一个问题:在通过一个给定点的所有面元中,是否能找到这样一个面元,作用在该面元上的力矢量正好垂直于它.在这种情况下,该面元的应力将是简单的拉应力(或压应力)而没有切向分量.这表示该面元的法向矢量和面元上的应力矢量的方向是一致的,这个方向称为应力张量的主方向(或主轴).这样的面元上的应力称为应力张量的主值(或主应力).

若这个面元上的力矢量 d$\boldsymbol{F}$ 垂直于这个面元,则 d$\boldsymbol{F}$ 与表示该面元的

法向矢量 d$\boldsymbol{A}$ 方向一致. 这样,这个力的协变分量 $\mathrm{d}F_j$ 必然与面元矢量 d$\boldsymbol{A}$ 的协变分量 $\mathrm{d}A_j$ 成正比,因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}F_j\boldsymbol{g}^j=\sigma_j^i\mathrm{d}A_i\boldsymbol{g}^j$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A_j\boldsymbol{g}^j$$

所以

$$\sigma_j^i\mathrm{d}A_i=\sigma\mathrm{d}A_j$$

式中 σ 是比例常数. 上式可以写成

$$(\sigma_j^i-\sigma\delta_j^i)\mathrm{d}A_i=0 \tag{4.3-1}$$

这个张量方程代表三个未知量 $\mathrm{d}A_i$ 的三个分量方程. 这些方程是齐次的,当且仅当这个方程组的 9 个系数的行列式为 0 时,即

$$\det(\sigma_j^i-\sigma\delta_j^i)=\begin{vmatrix}\sigma_1^1-\sigma & \sigma_1^2 & \sigma_1^3\\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2-\sigma & \sigma_2^3\\ \sigma_3^1 & \sigma_3^2 & \sigma_3^3-\sigma\end{vmatrix}=0 \tag{4.3-2}$$

时,方程(4.3-1)式才有非零解. (4.3-2)式是 σ 的三次方程,它有三个根 $\sigma_{(m)}$,下标(m)用来区分三个标量 $\sigma_{(1)}$、$\sigma_{(2)}$、$\sigma_{(3)}$. 这三个标量并不是某一个矢量的分量. $\sigma_{(m)}$ 称为应力张量 σ_j^i 的本征值,也就是应力张量 σ_j^i 的主值(或主应力).

一旦求出了这些本征值,就可以把每个本征值分别代入(4.3-1)式. 从而得到一组 $\mathrm{d}A_i$,以 $\mathrm{d}A_{(m)i}$ 表示它们. 下标(m)表示该 $\mathrm{d}A_{(m)i}$ 对应于本征值 $\sigma_{(m)}$,$\mathrm{d}A_{(m)i}$ 称为本征矢量,即应力张量的主方向(或主轴). 线性方程(4.3-1)是齐次的,所以它们也能被 $p\mathrm{d}A_{(m)i}$ 所满足,其中 p 可以是任一正数或负数,这表示,由(4.3-1)式决定的 $\mathrm{d}A_{(m)i}$ 只是比值 $\mathrm{d}A_{(m)1}:\mathrm{d}A_{(m)2}:\mathrm{d}A_{(m)3}$,即所确定的只是面元矢量的方向,而不包括它的大小.

将行列式(4.3-2)式展开,得以下方程:

$$(\sigma)^3-A(\sigma)^2+B\sigma-C=0 \tag{4.3-3}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}A&=\sigma_i^i\\ B&=\frac{1}{2}(\sigma_i^i\sigma_j^j-\sigma_j^i\sigma_i^j)\\ C&=\det\sigma_j^i\end{aligned}\right\} \tag{4.3-4}$$

(4.3-3)式是一个关于本征值 σ 的三次方程,称为应力张量 σ_j^i 的特征方程. 由此可以求出 σ 的三个值 $\sigma_{(1)}$、$\sigma_{(2)}$、$\sigma_{(3)}$.

另一方面 $\sigma_{(1)}$、$\sigma_{(2)}$、$\sigma_{(3)}$ 是方程(4.3-3)式的三个根，则方程(4.3-3)式可写成

$$(\sigma-\sigma_{(1)})(\sigma-\sigma_{(2)})(\sigma-\sigma_{(3)})=0$$

展开得

$$(\sigma)^3-I_1(\sigma)^2+I_2(\sigma)-I_3=0 \qquad (4.3-3a)$$

这个方程的根和系数之间存在以下的关系：

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{(1)}+\sigma_{(2)}+\sigma_{(3)} \\ I_2 &= \sigma_{(1)}\sigma_{(2)}+\sigma_{(2)}\sigma_{(3)}+\sigma_{(3)}\sigma_{(1)} \\ I_3 &= \sigma_{(1)}\sigma_{(2)}\sigma_{(3)} \end{aligned} \qquad (4.3-5)$$

比较方程(4.3-3)式与(4.3-3a)式，可以看出，I_1、I_2、I_3 可由应力张量表示如下：

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_i^i \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_i^i\sigma_j^j-\sigma_j^i\sigma_i^j) \\ I_3 &= \det\sigma_j^i \end{aligned} \qquad (4.3-6)$$

由(4.3-6)式可以看出：I_1、I_2、I_3 都是标量，它们不随坐标变换而改变，因此是不变量；I_1、I_2、I_3 分别称为应力张量 σ_j^i 的第一、第二、第三不变量；它们分别是应力张量分量的线性函数、二次函数和三次函数.(4.3-5)式是以主应力表示的应力张量的不变量.

主应力和主方向有以下特性：

1. 与两个不同的主值相联系的主方向是正交的.可证明如下：

令 $\sigma_{(m)}$、$\sigma_{(n)}$ 是(4.3-3)式的两个不同的根，又令 $dA_{(m)i}$、$dA_{(n)k}$ 是通过(4.3-1)式与这两个根相联系的本征矢量.这样方程(4.3-1)式可改写成以下的形式：

$$\sigma_j^i dA_{(m)i}=\sigma_{(m)}dA_{(m)j}$$

和

$$\sigma_l^k dA_{(n)k}=\sigma_{(n)}dA_{(n)l} \qquad (a)$$

用 g^{jl} 乘上面的第二式，则等号左边可表示成以下的形式：

$$\sigma_l^k g^{jl}dA_{(n)k}=\sigma^{kj}g_{jk}dA_{(n)}^j=\sigma_j^i dA_{(n)}^j$$

等号右边可表示为

$$\sigma_{(n)}dA_{(n)l}g^{jl}=\sigma_{(n)}dA_{(n)}^j$$

这样，方程(a)就成为如下的一对方程：

$$\sigma_j^i dA_{(m)i}=\sigma_{(m)}dA_{(m)j} \qquad (4.3-7a)$$

$$\sigma_j^i dA'_{(n)} = \sigma_{(n)} dA'_{(n)} \tag{4.3-7b}$$

以 $dA'_{(n)}$ 乘(4.3－7a)式的两边，以 $dA_{(m)i}$ 乘(4.3－7b)式的两边得

$$\sigma_j^i dA_{(m)i} dA'_{(n)} = \sigma_{(m)} dA_{(m)j} dA'_{(n)}$$

$$\sigma_j^i dA'_{(n)} dA_{(m)i} = \sigma_{(n)} dA'_{(n)} dA_{(m)i}$$

这两个方程的左边相等，右边的因子 $\sigma_{(m)}$ 和 $\sigma_{(n)}$ 是不同的，因为前面已经指出，它们是(4.3－3)式的两个不同的根. 这样，便得

$$dA_{(m)j} dA'_{(n)} = 0 \quad (m \neq n) \tag{4.3-8}$$

上式表明：与两个不同的主值相联系的主方向是正交的. 若(4.3－1)式的三个本征值是不同的实数，即三个主应力的值彼此不相同，则三个主方向互相正交；若二个主应力的值相同，则这二个主应力所在的平面内的任一方向皆为主方向；若三个主应力相等，则空间的任一方向都是主方向.

2. (4.3－3)式不可能有复根，即应力张量的本征值是三个实数，这可以很容易地证明. 若(4.3－3)式的三个根中有一对复根 $\sigma_{(1)} = R + iS$，$\sigma_{(2)} = R - iS$，则对应的本征矢量 $dA_{(1)}$、$dA_{(2)}$ 也是复数. 因为(4.3－1)式的 $\sigma_j^i dA_i = \sigma dA_j$ 中，σ_j^i 总是实数，因此若 σ 是复数，则 dA_j 也是复数. 令 $dA_{(1)j} = u_j + iw_j$，$dA_{(2)j} = u_j - iw_j$，上式中 R、S、u_j、w_j 都是实数. 正交性关系(4.3－8)式要求

$$(u_j + iw_j)(u^j - iw^j) = u_j u^j + w_j w^j + i(w_j u^j - u_j w^j) = 0$$

上式中括号内两项都是矢量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 的点积，它们彼此相等，应当消去；剩下的两项分别是 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{w}$ 自身的点积，它们是正数，它们的和不可能等于 0. 由此证明，本征值 $\sigma_{(m)}$ 不可能是复数.

3. 如沿应力张量的三个主方向取单位基矢量 $\boldsymbol{e}_m$ 作为参照标架，则它们相互正交. 在与 $\boldsymbol{e}_m$ 垂直的各面元上，只有法向应力 $\sigma_{(m)}$ 而没有切向应力分量. 这时，应力张量若以矩阵形式表示，则成对角矩阵.

$$(\sigma^{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{(3)} \end{pmatrix} \tag{4.3-9}$$

基矢量 $\boldsymbol{e}_m$ 是单位矢量，$\sigma_{(m)}$ 就是通常工程上采用的应力的量纲.

4. 主应力有极值. 这包括三方面：(1) 最大(或最小)的主应力是过相应点任意面元上的法向应力的最大(或最小)者；(2) 绝对值最大(或最小)的主应力是过相应点任意面元上的应力矢量的最大(或最小)者；(3) 最大剪应力等于最大主应力与最小主应力之差的一半. 前两点本书不加证明，可参阅文献[21]；第(3)点将在 § 4.4 讨论.

应力张量是二阶对称张量，本节所讨论的有关应力张量的这些性质，对于任何其他二阶对称张量都是成立的.

§ 4.4 最大剪应力

计算受力物体内任一点的最大剪应力(也称切应力)，可沿应力张量的主方向取单位基矢量 $\boldsymbol{e}_m$ 作为参照标架(图 4－4). 在这个直角参照标架中，应力张量如(4.3－9)式. 考虑任一面元 d$\boldsymbol{A}$(图 4－4)，若以外法向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 表示该面元的方向，dA 表示它的大小，p^j 为作用在该面元上的应力矢量的分量，则由(4.1－10)式得

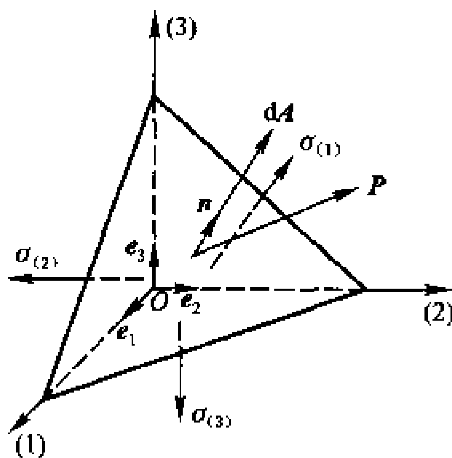


图 4－4

$$p^j = \sigma^{ij} n_i \tag{4.4-1}$$

作用在面元 d$\boldsymbol{A}$ 上的应力矢量在 $\boldsymbol{n}$ 方向的分量以 N 表示，则

$$N = p^j n_j = \sigma^{ij} n_i n_j = \sigma_{(1)}(n_1)^2 + \sigma_{(2)}(n_2)^2 + \sigma_{(3)}(n_3)^2 \tag{4.4-2}$$

这是因为在所考虑的问题中 $\sigma^{11} = \sigma_{(1)}, \sigma^{22} = \sigma_{(2)}, \sigma^{33} = \sigma_{(3)}, \sigma^{ij} = 0 (i \neq j)$. 作用在面元 d$\boldsymbol{A}$ 上的应力矢量 $\boldsymbol{P} = p^j \boldsymbol{e}_j$，$\boldsymbol{P}$ 的大小为

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{P}|^2 &= (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \\ &= (\sigma_{(1)} n_1)^2 + (\sigma_{(2)} n_2)^2 + (\sigma_{(3)} n_3)^2 \end{aligned} \tag{4.4-3}$$

作用在面元 d$\boldsymbol{A}$ 上的剪应力的大小为

$$\begin{aligned} S^2 &= |\boldsymbol{P}|^2 - N^2 \\ &= (\sigma_{(1)} n_1)^2 + (\sigma_{(2)} n_2)^2 + (\sigma_{(3)} n_3)^2 - \\ &\quad [\sigma_{(1)}(n_1)^2 + \sigma_{(2)}(n_2)^2 + \sigma_{(3)}(n_3)^2]^2 \end{aligned}$$

$$= [n_1 n_2(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})]^2 + [n_2 n_3(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})]^2 + [n_3 n_1(\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)})]^2 \tag{4.4-4}$$

为求 S 的极大值,可计算 $\frac{\partial(S^2)}{\partial n_i}$,并令它等于0,则得

$$\left.\begin{array}{l} 2n_1\{[n_2(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})]^2 + [n_3(\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)})]^2\} = 0 \\ 2n_2\{[n_3(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})]^2 + [n_1(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})]^2\} = 0 \\ 2n_3\{[n_1(\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)})]^2 + [n_2(\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})]^2\} = 0 \end{array}\right\} \tag{4.4-5}$$

而

$$(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1 \tag{4.4-6}$$

主应力的大小序列是

$$\sigma_{(1)} > \sigma_{(2)} > \sigma_{(3)} \tag{4.4-7}$$

解方程(4.4-5)、(4.4-6)式可得到使 S^2 为极值的 n_1、n_2、n_3 的值,再代入(4.4-4)式,即可求得 S^2 的极值.结果如表4-1所示.

表 4-1

n_1	± 1	0	0	0	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$
n_2	0	± 1	0	$\pm 1/\sqrt{2}$	0	$\pm 1/\sqrt{2}$
n_3	0	0	± 1	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0
S^2	0	0	0	$\left(\frac{\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}}{2}\right)^2$

由上面的结果可知,剪应力的极值是

$$\frac{1}{2}|\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)}|, \quad \frac{1}{2}|\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)}|, \quad \frac{1}{2}|\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)}| \tag{4.4-8}$$

由(4.4-7)式可知

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}|\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)}| \tag{4.4-9}$$

由表4-1可看出,τ_{max} 所在的面元的外法向矢量 $\boldsymbol{n} = \pm(\boldsymbol{e}_1 \pm \boldsymbol{e}_3)/\sqrt{2}$.因此,最大剪应力所在的面元等分最大主应力 $\sigma_{(1)}$ 与最小主应力 $\sigma_{(3)}$ 的方向(图4-4)所夹的直角.

§ 4.5 八面体剪应力

考虑受力物体内任一点 P. 在 P 点的邻近作一个平面,使它与三个主轴的倾角相等.由于在 P 点的邻近可以作 8 个这样的平面,它们构成一个正八面体,所以这些平面称为八面体平面(图 4－5).图中(1)、(2)、(3)为应力张量的主轴,各轴上的单位基矢量分别为 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$.今考虑第一象限的八面体平面,它的外法向单位矢量为

$$\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)/\sqrt{3}$$

即

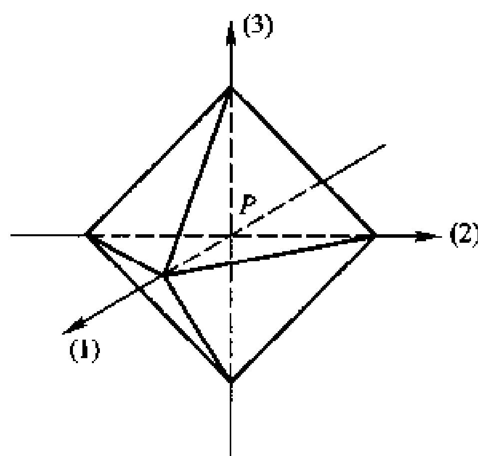


图 4－5

$$n_1=n_2=n_3=1/\sqrt{3} \tag{4.5-1}$$

由(4.4－4)式可知,在第一象限的八面体平面上

$$S^2=\frac{1}{9}\left[(\sigma_{(1)}-\sigma_{(2)})^2+(\sigma_{(2)}-\sigma_{(3)})^2+(\sigma_{(3)}-\sigma_{(1)})^2\right] \tag{4.5-2}$$

作用在八面体平面上的剪应力称为八面体剪应力,以 τ_0 表示.由(4.5－2)式可知

$$\tau_0=|S|=\frac{1}{3}\left[(\sigma_{(1)}-\sigma_{(2)})^2+(\sigma_{(2)}-\sigma_{(3)})^2+(\sigma_{(3)}-\sigma_{(1)})^2\right]^{1/2}$$

上式给出的 τ_0 值,对于所有的八面体平面都成立.

八面体剪应力 τ_0 是一个不变量.它在屈服准则理论中是一个有重要意义的量.τ_0 可以用应力张量的不变量(4.3－5)式表示为

$$9\tau_0^2 = 2I_1^2 - 6I_2 \tag{4.5-3}$$

§4.6 偏应力张量

偏应力张量 S_j^i 的定义是

$$S_j^i = \sigma_j^i - \delta_j^i p \tag{4.6-1}$$

式中

$$p = \frac{1}{3}\sigma_i^i \tag{4.6-2}$$

$\delta_j^i p$ 定义为球应力张量，也称为静水应力状态.球应力张量只使物体产生体积的弹性变化，而偏应力张量使物体产生无体积变化的形状变化.材料的屈服是由于偏应力张量的作用，因此在塑性力学中，偏应力张量是一个有重要意义的量，它与屈服准则密切相关.

偏应力张量是二阶对称张量，因此关于应力张量的主方向(主轴)、主值、不变量等概念(见§4.3)对偏应力张量完全适用.用§4.3同样的方法可以求出偏应力张量的主轴和主值.偏应力张量的主轴与应力张量的主轴一致；偏应力张量的主值是

$$S_{(1)} = \sigma_{(1)} - p, \quad S_{(2)} = \sigma_{(2)} - p, \quad S_{(3)} = \sigma_{(3)} - p \tag{4.6-3}$$

$S_{(1)}$、$S_{(2)}$、$S_{(3)}$ 是下列三次方程的根：

$$-(S)^3 + D_2 S + D_3 = 0 \tag{4.6-4}$$

式中

$$D_1 = S_i^i = S_{(1)} + S_{(2)} + S_{(3)} = 0 \tag{4.6-5a}$$

$$D_2 = \frac{1}{2}S_j^i S_i^j = \frac{1}{2}(S_{(1)}^2 + S_{(2)}^2 + S_{(3)}^2) = \frac{3}{2}(\tau_0)^2 \tag{4.6-5b}$$

$$D_3 = \det S_j^i = S_{(1)} S_{(2)} S_{(3)} \tag{4.6-5c}$$

D_1、D_2、D_3 是偏应力张量的不变量.

应力张量的不变量[(4.3-5)式或(4.3-6)式]与偏应力张量的不变量之间存在下列关系，这可以很容易地证明.

$$D_1 = 0 \tag{4.6-6a}$$

$$D_2 = -I_2 + \frac{1}{3}I_1^2 \tag{4.6-6b}$$

$$D_3 = I_3 - \frac{1}{3}(I_1 I_2) + \frac{2}{27}I_1^3 \tag{4.6-6c}$$

三次方程(4.6－4)式有三个实根,它们是(参阅数学手册编写组编,《数学手册》,人民教育出版社,第88、89页)

$$S_{(1)}=\sqrt{2}\tau_0\cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right) \tag{4.6-7a}$$

$$S_{(2)}=\sqrt{2}\tau_0\cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right) \tag{4.6-7b}$$

$$S_{(3)}=-\sqrt{2}\tau_0\cos\omega \tag{4.6-7c}$$

式中

$$-\cos 3\omega=\frac{\sqrt{2}D_3}{(\tau_0)^3} \tag{4.6-8}$$

由(4.6－7)、(4.6－8)及(4.6－3)式,可以得到下列主应力的计算公式:

$$\sigma_{(1)}=S_{(1)}+p=\sqrt{2}\tau_0\cos\left(\omega-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\sigma_i^i \tag{4.6-9a}$$

$$\sigma_{(2)}=S_{(2)}+p=\sqrt{2}\tau_0\cos\left(\omega+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{3}\sigma_i^i \tag{4.6-9b}$$

$$\sigma_{(3)}=S_{(3)}+p=-\sqrt{2}\tau_0\cos\omega+\frac{1}{3}\sigma_i^i \tag{4.6-9c}$$

§4.7 应力张量的物理分量

在曲线坐标系中,由于基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 可以有不同的量纲,张量分量的量纲与它们所表达的物理量的量纲可能不同,这给工程计算带来不便.因此,在进行工程计算时,常须采用张量的物理分量.

关于一阶张量的物理分量,已在§2.7讨论过,本节讨论应力张量(二阶张量)的物理分量.计算应力张量的物理分量,可利用定义应力张量的矢量方程,并根据矢量的物理分量的定义[(2.7－1),(2.7－2)式]来计算应力张量的物理分量.

定义应力张量的矢量方程是(4.1－5)式:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\mathrm{d}F^j\boldsymbol{g}_j=\sigma^{ij}\mathrm{d}A_i\boldsymbol{g}_j \tag{4.1-5}$$

面元 d$\boldsymbol{A}$ 的表示式为(4.1－3)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}A_i\boldsymbol{g}^i$$

由(2.7－2)式,面元 d$\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{d}A_i\sqrt{g^{ii}}\frac{\boldsymbol{g}^i}{\sqrt{g^{ii}}} \tag{4.7-1}$$

这样，面元 d**A** 的物理分量为

$$dA_{(i)} = dA_i\sqrt{g^{ii}} \qquad (4.7-2)$$

它的量纲是 L^2. 根据(2.7-1)、(4.7-1)式，(4.1-5)式可写成

$$d\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sigma^{ij}\frac{\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g^{ii}}}dA_i\sqrt{g^{ii}}\frac{\boldsymbol{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}} \qquad (4.7-3)$$

上式中 $\frac{\boldsymbol{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}}$ 是单位基矢量；$dA_i\sqrt{g^{ii}}$ 是面元的物理分量，量纲为 L^2；d**F** 是力矢量，量纲为 ML/T^2. 这样，应力张量的物理分量是

$$\sigma^{(ij)} = \sigma^{ij}\frac{\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g^{ii}}} \quad (i、j\text{ 不求和}) \qquad (4.7-4)$$

它的量纲是 M/LT^2，它与通常工程上采用的应力的量纲是相同的. 同理，应力张量的混合分量 σ^i_j 的物理分量是

$$\sigma^{(i)}_{(j)} = \sigma^i_j\frac{\sqrt{g^{jj}}}{\sqrt{g^{ii}}} \quad (i、j\text{ 不求和}) \qquad (4.7-5)$$

在正交曲线坐标系中，由(1.7-3)式得

$$g^{ii} = 1/g_{ii} \quad (i\text{ 不求和})$$

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

则在正交曲线坐标系，应力张量的物理分量的表示式为

$$\sigma^{(ij)} = \sigma^{ij}\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}} \quad (i、j\text{ 不求和}) \qquad (4.7-6)$$

$$\sigma^{(i)}_{(j)} = \sigma^i_j\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g^{jj}} \quad (i、j\text{ 不求和}) \qquad (4.7-7)$$

必须指出：张量的物理分量与其相应的张量分量有相同的物理意义，但是量纲不同，在坐标变换时，张量分量按特定的法则变换，而物理分量却没有张量的性质，不能按张量的变换法则变换. 对这二者必须加以区别.

§4.8 圆柱坐标系、球坐标系中的静力方程

张量方程的不变性，使得用张量形式表示的弹性力学基本方程在各种曲线坐标系都成立. 这样在处理弹性力学问题时，可以根据讨论对象(物体)的几何形状，选择最适合于处理该问题的曲线坐标系. 而以张量形式表示的基本方程并不因选择的坐标系不同而改变，这就不必因采用了不同的坐标系而重新推导基本方程. 这是张量分析在应用上的优越性. 但

在进行工程计算时,必须在选定的坐标系中采用分量方程,且须使方程中各项的物理量纲相同.这样,便必须建立在所选定的曲线坐标系中以物理分量表示的该问题的基本方程.

由张量方程变换成在特定的曲线坐标系中以物理分量表示的分量方程,只须将张量方程展开成在特定的曲线坐标系中以张量分量表示的分量方程,然后再变换成以物理分量表示的分量方程.

现以平衡方程(4.2-2)式为例,说明如何由张量方程 $\sigma^{ij}|_j + F^i = 0$ 变换成在特定坐标系(如球坐标系)中以物理分量表示的分量方程.

球坐标系的 g_{ij}、g^{ij} 见§1.7中(1.7-15)、(1.7-17)式;克里斯托费尔符号 Γ^k_{ij} 见(3.2-6)式.

由(4.2-2)式,在 r 方向(x^1 方向)的平衡方程以张量分量表示为

$$\sigma^{1j}|_j + F^1 = 0 \tag{4.8-1}$$

将上式展开,由(3.4-5)式可得

$$\begin{aligned}\sigma^{1j}|_j &= \sigma^{11}_{,1} + \sigma^{12}_{,2} + \sigma^{13}_{,3} - \sigma^{22} r - \sigma^{33} r\sin^2\varphi + \\ &\quad \frac{\sigma^{11}}{r} + \frac{\sigma^{11}}{r} + \sigma^{12}\cot\varphi \\ &= \frac{\partial\sigma^{11}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma^{12}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma^{13}}{\partial\theta} - \sigma^{22} r - \\ &\quad \sigma^{33} r\sin^2\varphi + 2\frac{\sigma^{11}}{r} + \sigma^{12}\cot\varphi\end{aligned} \tag{4.8-2}$$

在上面的展开式中 $\sigma^{11}, \sigma^{22}, \cdots, \sigma^{13}$ 是张量分量,还须进一步变换成物理分量.

以符号 $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\theta}, \sigma_{r\theta}$ 表示应力张量的物理分量,则由(4.7-6)式可知

$$\sigma_{rr} = \sigma^{11} \tag{4.8-3a}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = r^2\sigma^{22} \tag{4.8-3b}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^2\sin^2\varphi \cdot \sigma^{33} \tag{4.8-3c}$$

$$\sigma_{r\varphi} = r\sigma^{12} \tag{4.8-3d}$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = r^2\sin\varphi \cdot \sigma^{23} \tag{4.8-3e}$$

$$\sigma_{r\theta} = r\sin\varphi \cdot \sigma^{13} \tag{4.8-3f}$$

体力的物理分量为

$$F^{(i)} = \sqrt{g_{\underline{ii}}}F^i \tag{4.8-4}$$

以符号 F_r, F_φ, F_θ 表示体力的物理分量,则

$$F_r = F^1 \tag{4.8-5a}$$

$$F_\varphi = rF^2 \tag{4.8-5b}$$

$$F_\theta = r\sin\varphi F^3 \tag{4.8-5c}$$

将(4.8-3)、(4.8-5)式代入(4.8-2)式,便得出以物理分量表示的平衡方程(r 方向):

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\varphi}\cot\varphi}{r} + F_r = 0 \tag{4.8-6}$$

从这个例子可以看出张量表达方式的优越性.由张量方程变换成以物理分量表示的分量方程是一个以张量"语言"进行"翻译"的过程.这种"翻译"过程非常有规律,不易出错,也不复杂.若不采用张量方程,则在不同的曲线坐标系中,必须分别推导弹性力学的基本方程,这是很费事的,工作量很大,有时也很困难.

下面不作推导,将圆柱坐标系和球坐标系中,用物理分量表示的静力平衡方程列出,读者可作为练习自行推导.

一、圆柱坐标系(图 1-4)

单位基矢量 e_r, e_θ, e_z.

体力
$$\boldsymbol{F} = F_r\boldsymbol{e}_r + F_\theta\boldsymbol{e}_\theta + F_z\boldsymbol{e}_z \tag{4.8-7}$$

静力平衡方程:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + F_r = 0 \tag{4.8-8a}$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \tag{4.8-8b}$$

$$\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + F_z = 0 \tag{4.8-8c}$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r}, \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta}, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{rz} \tag{4.8-8d}$$

在上列方程中,应力分量和体力分量都是物理分量,所有的指标均写成下标.在下面关于球坐标的讨论中,指标的记法与此相同.

二、球坐标系(图 1-5)

单位基矢量 e_r, e_φ, e_θ.

体力

$$\boldsymbol{F} = F_r\boldsymbol{e}_r + F_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + F_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{4.8-9}$$

静力平衡方程：

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{2\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{r\varphi}\cot\varphi}{r}+F_r=0 \tag{4.8-10a}$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{3\sigma_{r\varphi}+(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\theta\theta})\cot\varphi}{r}+F_\varphi=0 \tag{4.8-10b}$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{3\sigma_{r\theta}+2\sigma_{\theta\varphi}\cot\varphi}{r}+F_\theta=0 \tag{4.8-10c}$$

$$\sigma_{r\theta}=\sigma_{\theta r},\ \sigma_{\theta\varphi}=\sigma_{\varphi\theta},\ \sigma_{\varphi r}=\sigma_{r\varphi} \tag{4.8-10d}$$

习　题

1. 参考图 4－3，画出应力张量的混合分量 σ^i_j 所在的面元及方向.（注：只须画出 $\sigma^1_1,\sigma^1_2,\sigma^2_1,\sigma^1_2$）

2. 某物体处于静力平衡状态，若应力场（直角坐标系）为

$$\sigma^{11}=10(x^1)^3+(x^2)^2,\qquad \sigma^{12}=(x^3)^2$$
$$\sigma^{22}=20(x^1)^3+100,\qquad \sigma^{23}=x^2$$
$$\sigma^{33}=30(x^2)^2+10(x^3)^3,\qquad \sigma^{31}=(x^1)^2$$

求点 $(x^1,x^2,x^3)=(1,1,1)$ 的体力矢量 $\boldsymbol{F}$.

3. 物体内一点 P 的应力张量对于直角坐标的分量为

$$\begin{bmatrix}\sigma^{11}&\sigma^{12}&\sigma^{13}\\ \sigma^{21}&\sigma^{22}&\sigma^{23}\\ \sigma^{31}&\sigma^{32}&\sigma^{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&3&0\\-4&0&5\end{bmatrix}$$

(a) 计算经过 P 点的某平面上的应力矢量 $\boldsymbol{p}$，该平面的单位外法向矢量

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{e}_3$$

(b) 计算上述应力矢量 $\boldsymbol{p}$ 的大小 $|\boldsymbol{p}|$

(c) 计算 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角

(d) 计算 $\boldsymbol{p}$ 的 $\boldsymbol{n}$ 方向的分量（法向分量）N，及垂直于 $\boldsymbol{n}$ 方向的分量（切向分量）S

4. 一点 P_1 的应力张量为 $\sigma^i_j=-p\delta^i_j$，p 是标量（静水应力状态）. 求证：经过 P_1 点的任意平面上的剪应力均等于 0.

5. 考虑应力场 $\sigma^i_j=-p\delta^i_j$，式中 $p(x^1,x^2,x^3)$ 为标量. 求证：在这种情况下，静力平衡方程取以下的形式：

$$-\mathrm{grad}\,p + \boldsymbol{F} = 0$$

6. 推导应力张量 σ_j^i 的特征方程和应力张量的不变量(4.3-3)式和(4.3-4)式，并写出(4.3-4)式的展开式.

7. 物体内一点 P 的应力张量的分量(直角坐标 x,y,z)为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 8 \\ -3 & 7 & 1 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix} \times 10^7\,\mathrm{Pa}$$

求：(a) P 点的主应力；

(b) P 点的应力张量的主方向(以主轴相对于 x,y,z 轴的方向余弦表示)；

(c) P 点的八面体剪应力；

(d) P 点的偏应力张量和球应力张量；

(e) 应力张量的不变量和偏应力张量的不变量.

8. 求证：八面体剪应力 τ_0 可以用应力张量的不变量 I_1、I_2 表示为

$$\tau_0^2 = \frac{1}{9}(2I_1^2 - 6I_2)$$

9. 求证：八面体剪应力 τ_0 所在面上的法向应力为

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}I_1$$

10. 推导偏应力张量 S_j^i 的特征方程(4.6-4)及偏应力张量的不变量(4.6-5)各式，并写出 D_1, D_2, D_3 的展开式.

11. 求证：应力张量的不变量 I_1、I_2、I_3 与偏应力张量的不变量 D_1、D_2、D_3 之间存在如(4.6-6)式所示的关系.

12. 求证：偏应力张量的主值与应力张量的主值方向相同.

13. 从平衡方程 $\sigma^{ij}|_j + F^i = 0$ 出发，推导在平面极坐标系中，以物理分量表示的平衡方程.

14. 从平衡方程(4.2-2)出发，推导在圆柱坐标系中、以物理分量表示的平衡方程(4.8-8)式.

15. 从平衡方程(4.2-2)出发，推导在球坐标系中以物理分量表示的平衡方程(4.8-10)式.

16. 求证：在直角坐标系中，由应力张量的分量表示的八面体剪应力 τ_0 为

$$9\tau_0^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)$$

17. 求证：以偏应力张量的主值表示的八面体剪应力 τ_0 为

$$9\tau_0^2 = (S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2$$

第五章　应 变 分 析

§5.1　应变张量的概念

一、变形梯度

设物体在未变形状态(初态)占据空间某个区域 B,物体内任一点 P 的位置由曲线坐标 X^K $(K=1,2,3)$描述,或者由坐标原点 O 到 P 点的位置矢量 $\boldsymbol{P}$ 描述.变形后,原来占据区域 B 的质点集合进入空间另一区域 b,P 点移动到 p.在变形后的状态(终态),点 p 的位置由另一曲线坐标 x^k $(k=1,2,3)$描述,或者由坐标原点 O 到 p 点的位置矢量 $\boldsymbol{p}$ 描述.坐标系 X^K 和 x^k 不一定相同(图 5－1).

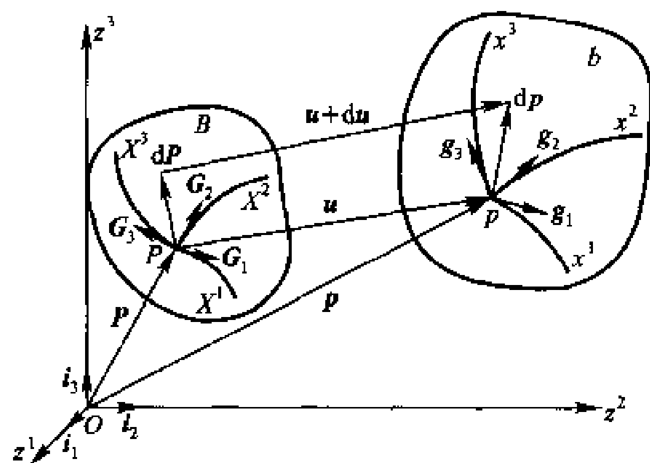


图　5－1

设物体由 B 变形到 b 是连续的,物体内各质点在变形前后是一一对应的,坐标 x^k 与 X^K 由下式相联系:

$$x^k = x^k(X^1, X^2, X^3)\ (k=1,2,3) \tag{5.1-1}$$

上式是可逆的,

$$X^K = X^K(x^1, x^2, x^3)\ (K=1,2,3) \tag{5.1-2}$$

设函数(5.1－1)和(5.1－2)式在它们的定义域内有连续的一阶偏导数,则可定义变形梯度

$$x^k_{,K} \equiv \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \tag{5.1-3}$$

$$X^K_{,k} \equiv \frac{\partial X^K}{\partial x^k} \tag{5.1-4}$$

它们是两点张量,在§3.9已讨论过它们的变换法则.

显然,变形梯度存在以下关系:

$$X^K_{,k} x^k_{,L} = \delta^K_L \qquad x^k_{,K} X^K_{,l} = \delta^k_l \tag{5.1-5a.b}$$

二、应变张量

考虑物体内(初态)任一线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}$,变形后为 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$(在区域 b 内)(图 5-1). 在区域 B 内线元长度的平方和区域 b 内线元长度的平方分别是

$$\mathrm{d}S^2 = G_{KL}\,\mathrm{d}X^K\mathrm{d}X^L \tag{5.1-6}$$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{kl}\,\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l \tag{5.1-7}$$

$\mathrm{d}S^2$ 和 $\mathrm{d}s^2$ 也可分别用 x^k 坐标和 X^K 坐标表示,由(5.1-1)式和(5.1-2)式,得

$$\mathrm{d}X^K = X^K_{,k}\,\mathrm{d}x^k \tag{5.1-8a}$$

$$\mathrm{d}x^k = x^k_{,K}\,\mathrm{d}X^K \tag{5.1-8b}$$

将上二式分别代入(5.1-6)式和(5.1-7)式,可得

$$\mathrm{d}S^2 = c_{kl}\,\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l \tag{5.1-9}$$

$$\mathrm{d}s^2 = C_{KL}\,\mathrm{d}X^K\mathrm{d}X^L \tag{5.1-10}$$

式中

$$c_{kl} = G_{KL}X^K_{,k}X^L_{,l} \tag{5.1-11a}$$

$$C_{KL} = g_{kl}x^k_{,K}x^l_{,L} \tag{5.1-11b}$$

c_{kl}、C_{KL} 分别称为柯西变形张量和格林变形张量,它们都是对称张量,$c_{kl} = c_{lk}$,$C_{KL} = C_{LK}$,并且都是正定的. 和(1.5-2)式比较,c_{kl}、C_{KL} 和度量张量 g_{kl}、G_{KL} 的意义相似,只是 c_{kl} 以变形后的坐标描述初态的线元平方,而 C_{KL} 则反之.

显然,若在 B 中所有线元长度的平方与在 b 中相应线元长度的平方相等,即 $\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}s^2$,则表示在 B 中任意相邻两点间的距离不因变形而改变,这种情况便是刚体运动. 因此,差$(\mathrm{d}s^2 - \mathrm{d}S^2)$可用来度量介质由于变形而产生的应变. 这个差可以用初坐标 X^K 表示,也可以用终坐标 x^k 表示. 由(5.1-6)式和(5.1-10)式,可得

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}dX^K dX^L \tag{5.1-12}$$

式中

$$E_{KL} = \frac{1}{2}(C_{KL} - G_{KL}) \tag{5.1-13}$$

由(5.1-7)式和(5.1-9)式可得

$$ds^2 - dS^2 = 2e_{kl}dx^k dx^l \tag{5.1-14}$$

式中

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(g_{kl} - c_{kl}) \tag{5.1-15}$$

E_{KL} 和 e_{kl} 分别称为拉格朗日(Lagrange)有限应变张量和欧拉(Euler)有限应变张量，它们都是对称张量．采用这样的名称是和流体动力学相似，拉格朗日有限应变张量采用拉格朗日描述法，用初坐标 X^K 作为自变量，而欧拉有限应变张量采用欧拉描述法，用终坐标 x^k 作为自变量．拉格朗日有限应变张量也称为格林有限应变张量，欧拉有限应变张量也称为阿尔曼西(Almansi)有限应变张量．应变张量是度量物体质点邻域纯变形的几何量．

由以上关于应变张量的讨论可知，物体内各点的应变张量 E_{KL} 或 e_{kl} 的全部分量等于零是物体变形(5.1-1)只有刚体运动(只有移动和转动，没有质点间距离的改变)的必要和充分的条件．

三、应变张量与位移矢量的关系

由图 5-1 可以看出，P 点的位移矢量为 $\boldsymbol{u}$，它与位置矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的关系如下式：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{P} \tag{5.1-16}$$

$\boldsymbol{u}$ 可以由下面的任一方式表示(见§3.9)：

$$\boldsymbol{u} = U^K\boldsymbol{G}_K = U_K\boldsymbol{G}^K \tag{5.1-17}$$

或

$$\boldsymbol{u} = u^k\boldsymbol{g}_k = u_k\boldsymbol{g}^k \tag{5.1-18}$$

由(3.3-1)式及(3.3-3)式得

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X^K} = U_M|_K\boldsymbol{G}^M = U^M|_K\boldsymbol{G}_M \tag{5.1-19}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^k} = u_m|_k\boldsymbol{g}^m = u^m|_k\boldsymbol{g}_m \tag{5.1-20}$$

基于以上的表示式，并由(5.1-11b)式，格林变形张量 C_{KL} 可由位移矢量

表示如下：

$$
\begin{aligned}
C_{KL} &= g_{kl}\frac{\partial x^k \partial x^l}{\partial X^K \partial X^L} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x^l}\frac{\partial x^k \partial x^l}{\partial X^K \partial X^L} \\
&= \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial X^K}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial X^L} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial X^K}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X^K}\right)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial X^L}+\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial X^L}\right) \\
&= (\boldsymbol{G}_K + U_M|_K\boldsymbol{G}^M)\cdot(\boldsymbol{G}_L + U_N|_L\boldsymbol{G}^N) \\
&= G_{KL} + U_K|_L + U_L|_K + U_M|_K U^M|_L
\end{aligned}
\tag{5.1-21}
$$

将上式代入(5.1－13)式，可得拉格朗日应变张量表示式为

$$
E_{KL} = \frac{1}{2}(U_K|_L + U_L|_K + U_M|_K U^M|_L) \tag{5.1-22}
$$

同理可得欧拉应变张量表示式为

$$
e_{kl} = \frac{1}{2}(u_k|_l + u_l|_k - u_m|_k u^m|_l) \tag{5.1-23}
$$

它们是张量方程，在各种坐标系中都成立.

§5.2 直角坐标系中的应变张量

今采用同一个直角坐标系描述物体的初态和终态，但为了区别这两个状态，仍旧使用 X^i 和 x^i 描述质点在未变形和变形后的坐标(图 5－2).在直角坐标系中，线元长度平方的表示式(5.1－6)和(5.1－7)取以下形式：

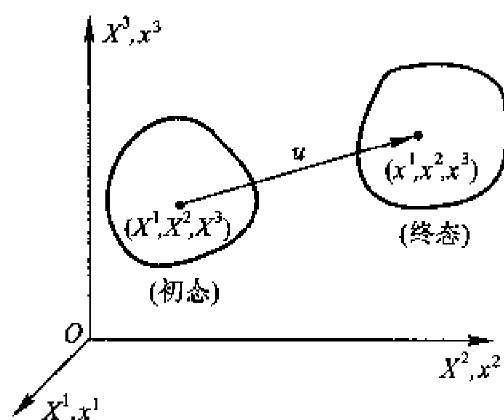


图 5－2

$$
\mathrm{d}S^2 = \delta_{KL}\,\mathrm{d}X^K\,\mathrm{d}X^L
$$

$$
\mathrm{d}s^2 = \delta_{kl}\,\mathrm{d}x^k\,\mathrm{d}x^l
$$

将上式分别代入(5.1－12)式和(5.1－14)式，可得拉格朗日有限应变张量和欧拉有限应变张量的表示式：

$$E_{KL}=\frac{1}{2}\left(\delta_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial X^K}\frac{\partial x^n}{\partial X^L}-\delta_{KL}\right) \tag{5.2-1}$$

$$e_{kl}=\frac{1}{2}\left(\delta_{kl}-\delta_{MN}\frac{\partial X^M}{\partial x^k}\frac{\partial X^N}{\partial x^l}\right) \tag{5.2-2}$$

今讨论 $E_{\underline{KK}}$(K 不求和)这样的应变张量分量的物理意义. 为此，考虑在初态沿 X^1轴方向的线元 dS，它的分量是

$$\mathrm{d}X^1=\mathrm{d}S,\quad \mathrm{d}X^2=0,\quad \mathrm{d}X^3=0$$

由(5.1－12)式，并基于上面的关系式，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2-\mathrm{d}S^2&=2E_{KL}\mathrm{d}X^K\mathrm{d}X^L=2E_{11}\mathrm{d}X^1\mathrm{d}X^1\\&=2E_{11}\mathrm{d}S^2\end{aligned} \tag{5.2-3}$$

今定义线元的伸长率为 E_1

$$E_1=\frac{\mathrm{d}s-\mathrm{d}S}{\mathrm{d}S}$$

则

$$\mathrm{d}s=\mathrm{d}S(1+E_1)$$

代入(5.2－3)式得

$$(1+E_1)^2-1=2E_{11}$$

由此得出

$$E_1=\sqrt{1+2E_{11}}-1 \tag{5.2-4}$$

若应变很小，以致在展开上式的根号时只需保留线性项，则

$$E_1\approx E_{11} \tag{5.2-5}$$

对于 E_{22}、E_{33}可得出与(5.2－4)(5.2－5)式类似的关系式. 由此可知应变张量分量 $E_{\underline{KK}}$(K 不求和)分别描述平行于坐标轴 X^K 的那些线元的伸长率 E_K，但并不等于伸长率；只是在小应变情况下，E_{KK}才与 E_K相等.

为了考察 E_{KL}($K\neq L$)这样的应变张量分量的物理意义，今考虑两个线元 dS 和 d$\bar{S}$，它们在初态分别平行于 X^1 轴和 X^2 轴. 这样，便有

线元 dS：

$$\mathrm{d}X^1=\mathrm{d}S,\quad \mathrm{d}X^2=0,\quad \mathrm{d}X^3=0 \tag{5.2-6a}$$

线元 d$\bar{S}$：

$$\mathrm{d}X^1=0,\quad \mathrm{d}X^2=\mathrm{d}\bar{S},\quad \mathrm{d}X^3=0 \tag{5.2-6b}$$

变形后，上述线元成为在 x^i 坐标系的线元 $\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}\bar{s}$，它们之间的夹角为 θ. 写出它们的标量积，由(1.11－2)式及(5.2－1)式，并考虑到(5.2－6)式，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s\cdot\mathrm{d}\bar{s} &= |\mathrm{d}s||\mathrm{d}\bar{s}|\cos\theta=\delta_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}\bar{x}^n\\&=\delta_{mn}\frac{\partial x^m}{\partial X^K}\frac{\partial x^n}{\partial X^L}\mathrm{d}X^K\mathrm{d}\bar{X}^L=(\delta_{KL}+2E_{KL})\mathrm{d}X^K\mathrm{d}\bar{X}^L\\&=(\delta_{12}+2E_{12})\mathrm{d}S\mathrm{d}\bar{S}=2E_{12}\mathrm{d}S\mathrm{d}\bar{S}\end{aligned}\qquad(5.2-7)$$

由(5.2－4)式，有

$$\mathrm{d}s=\mathrm{d}S\sqrt{1+2E_{11}}$$

$$\mathrm{d}\bar{s}=\mathrm{d}\bar{S}\sqrt{1+2E_{22}}$$

将它们代入式(5.2－7)，可得

$$\cos\theta=\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}$$

若以 α_{12} 表示 $\mathrm{d}S$ 和 $\mathrm{d}\bar{S}$ 间夹角 $\pi/2$ 的改变，则

$$\alpha_{12}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

这样

$$\sin\alpha_{12}=\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}\qquad(5.2-8)$$

对于小应变情况

$$\alpha_{12}=2E_{12}\qquad(5.2-9)$$

对于 E_{23}、E_{31}，可以得到与(5.2－8)、(5.2－9)形式相同的表示式. 由它们可以看出，很难给予应变张量分量 $E_{KL}(K\neq L)$ 以简单的物理意义，只是在小应变情况下，$E_{KL}(K\neq L)$ 等于通常意义的剪应变(或称切应变) α_{KL} 的二分之一.

对于欧拉有限应变张量分量可作出与上述拉格朗日有限应变张量分量相似的解释. 若定义伸长率为

$$e_1=\frac{\mathrm{d}s-\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s}$$

则

$$e_1=1-\sqrt{1-2e_{11}}\qquad(5.2-10)$$

若变形后相互正交的两个线元在变形前的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\beta_{12}$，则有

$$\sin\beta_{12}=\frac{2e_{12}}{\sqrt{1-2e_{11}}\sqrt{1-2e_{22}}} \tag{5.2-11}$$

对于小应变情况,可得

$$e_1\approx e_{11} \tag{5.2-12a}$$

$$\beta_{12}\approx 2e_{12} \tag{5.2-12b}$$

由图 5.2 可以看出,位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 在直角坐标系中的分量 u^i 为

$$u^i=x^i-X^i \tag{5.2-13}$$

上式和(5.1－16)式是相同的.因此,和§5.1 中的讨论一样,应变张量和位移矢量的关系式与(5.1－22)式和(5.1－23)式相同.但在直角坐标系中,协变导数与偏导数相同,这样

$$E_{KL}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_K}{\partial X^L}+\frac{\partial U_L}{\partial X^K}+\frac{\partial U_M}{\partial X^K}\frac{\partial U^M}{\partial X^L}\right) \tag{5.2-14}$$

$$e_{kl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x^l}+\frac{\partial u_l}{\partial x^k}-\frac{\partial u_m}{\partial x^k}\frac{\partial u^m}{\partial x^l}\right) \tag{5.2-15}$$

在上式中,乘积项两个相同的指标 M、M 和 m、m 表示求和.若将上式展开,以 X、Y、Z 表示 X^1、X^2、X^3;以 x、y、z 表示 x^1、x^2、x^3;以 U、V、W 和 u、v、w 分别表示 U_1、U_2、U_3 和 u_1、u_2、u_3,则可得拉格朗日有限应变张量分量和欧拉有限应变张量分量在直角坐标系中的表示式:

$$\left.\begin{aligned}
&E_{XX}=\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)^2\right]\\
&\cdots\cdots\\
&E_{XY}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial X}+\left(\frac{\partial U}{\partial X}\frac{\partial U}{\partial Y}+\frac{\partial V}{\partial X}\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{\partial W}{\partial X}\frac{\partial W}{\partial Y}\right)\right]\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{5.2-16}$$

$$\left.\begin{aligned}
&e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\\
&\cdots\cdots\\
&e_{xy}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{5.2-17}$$

必须注意,在计算拉格朗日有限应变张量时,位移分量 U、V、W 是质点的初坐标 X、Y、Z 的函数;计算欧拉有限应变张量时,位移分量 u、v、w

是终坐标 x、y、z 的函数.

§5.3 小变形应变张量、转动张量

一、小变形应变张量

若变形很小以致可以略去(5.1－22)式和(5.1－23)式中位移协变导数的二次项,则可得到经典弹性理论中小变形应变张量的表示式:

$$E_{KL}=\frac{1}{2}(U_K|_L+U_L|_K) \tag{5.3-1a}$$

$$e_{kl}=\frac{1}{2}(u_k|_l+u_l|_k) \tag{5.3-1b}$$

这实际上是将(5.1－22)式和(5.1－23)式线性化,使得应变张量是位移协变导数的线性函数.

在经典弹性理论中,假设位移及位移对于 X^i(或 x^i)的偏导数是微小的,因此略去了初坐标和终坐标的差别,这样,拉格朗日应变张量和欧拉应变张量的差别也就消失.小变形应变张量的表示式是

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_i|_j+u_j|_i) \tag{5.3-2}$$

显然,ε_{ij} 是二阶对称张量.在直角坐标系中

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) \tag{5.3-3'}$$

它的展开式是

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x^1},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x^2},\quad \varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\\
&\varepsilon_{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right),\quad \varepsilon_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^3}+\frac{\partial u_3}{\partial x^2}\right)\\
&\varepsilon_{31}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^1}+\frac{\partial u_1}{\partial x^3}\right)\\
&\varepsilon_{21}=\varepsilon_{12},\quad \varepsilon_{32}=\varepsilon_{23},\quad \varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}
\end{aligned}\right\} \tag{5.3-3}$$

二、转动张量

由(2.2－8)式可知,小变形应变张量 ε_{ij}[(5.3－2)式]是位移协变导数 $u_i|_j$(二阶张量)的对称部分.$u_i|_j$ 的反对称部分是

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j - u_j|_i) \tag{5.3-4}$$

它是一个反对称张量

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{5.3-5}$$

由(2.2-5)式可知，在三维空间，任何一个反对称张量可以和一个矢量联系起来，这叫做反对称张量的反偶矢量．这样

$$\omega^k = -\frac{1}{2}\in^{ijk}\omega_{ij} \tag{5.3-6}$$

式中$\in^{ijk}$是置换张量．将(5.3-6)式展开，则有

$$\omega^1 = \frac{1}{2}(u_3|_2 - u_2|_3)\in^{231} \tag{5.3-7a}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(u_1|_3 - u_3|_1)\in^{312} \tag{5.3-7b}$$

$$\omega^3 = \frac{1}{2}(u_2|_1 - u_1|_2)\in^{123} \tag{5.3-7c}$$

这样，ω^k 与 u_i 的关系可以写成

$$\omega^k = -\frac{1}{2}\in^{ijk}u_i|_j \tag{5.3-7d}$$

由(3.6-7)，(3.6-8)式，

$$\boldsymbol{\omega} = \omega^k\boldsymbol{g}_k = \frac{1}{2}\mathrm{curl}\ \boldsymbol{u} \tag{5.3-8}$$

ω^k 与 ω_{ij} 分别称为位移场 u_i 的转动矢量和转动张量．

将(5.3-6)式在直角坐标系中写出来，可以比较容易地看出它的几何意义．

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(u_{3,2} - u_{2,3})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1})$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} \quad u_{1,2})$$

下面只讨论一个分量 ω_3：

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2})$$

由图5-3可以看出：导数 $u_{2,1}$ 是线元 dz^1 的转角，$-u_{1,2}$ 是线元 dz^2 的转角，两者都以逆时针方向为正，ω_3 是这两个转角的平均值，因此 ω_3 可

以看作是代表体元平均转动的一个分量．若 $u_{2,1} = -u_{1,2}$，则 $\epsilon_{12} = 0$，这时，ω_3 表示体元绕 z^3 轴作刚体(微小)转动．由此可以得出一个普遍的定理：应变张量 E_{KL} 或 e_{kl} 等于 0，是一质点的邻域作刚体运动的必要和充分的条件．

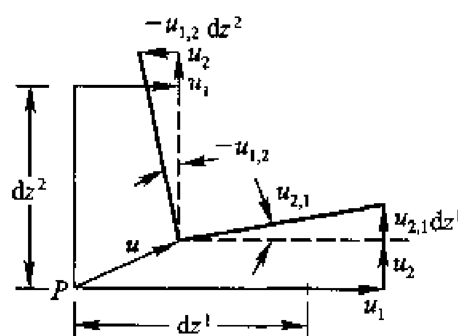


图 5-3

§5.4 相容方程

方程(5.1－22)或(5.1－23)可以看作是有六个方程的联立偏微分方程组，若给定应变张量分量，则可由这个偏微分方程组决定位移场的三个分量．由于方程数多于未知量数，显然，这个偏微分方程若存在解，应变张量分量是不能随意给定的．为保证解存在，必须对函数 e_{ij}(或 E_{ij})给予某些限制，这样的限制称为相容条件(相容方程)．对于(5.3－3)式表示的小变形应变张量，其相容方程曾由圣维南(Saint Venant)推导出来(1860年)，并证明了它的必要性．本节先讨论有限应变张量(5.1－22)式或(5.1－23)式的相容方程．

在§5.1 中已指出，变形发生的空间是欧几里得空间，因此与欧几里得空间的度量张量(由 $dS^2 = c_{kl}dx^k dx^l$ 规定)联系的黎曼－克里斯托费尔张量 $R^{(c)}_{klmn}$ 等于 0，即

$$R^{(c)}_{klmn} = \Gamma_{lnk,m} - \Gamma_{lmk,n} + \Gamma_{knr}\Gamma^r_{lm} - \Gamma_{kmr}\Gamma^r_{ln} = 0 \quad (5.4-1)$$

式中黎曼－克里斯托费尔张量由柯西变形张量 c_{kl} 计算．由(5.1－15)式得

$$c_{kl} = g_{kl} - 2e_{kl}$$

因此可以计算(5.4－1)中的克里斯托费尔符号，以 g_{kl} 和 e_{kl} 表示．但是基于 g_{kl} 的黎曼－克里斯托费尔张量 $R^{(g)}_{klmn}$ 等于 0，它是由 g_{kl} 表示的．将 $R^{(c)}_{klmn}$ 表示式中属于 $R^{(g)}_{klmn}$ 的各项删去，这样，便得到有限应变张量的相容条件，本书不加推导将它列出．读者可参阅参考书目[22]．

$$
\begin{aligned}
&e_{kn,lm}+e_{lm,kn}-e_{km,ln}-e_{ln,km}+2g^{rs}\{\Gamma_{knr}^{(e)}\Gamma_{lms}^{(g)}+\\
&\Gamma_{knr}^{(g)}\Gamma_{lms}^{(e)}-2\Gamma_{knr}^{(e)}\Gamma_{lms}^{(e)}-\Gamma_{kmr}^{(e)}\Gamma_{lns}^{(g)}-\Gamma_{kmr}^{(g)}\Gamma_{lns}^{(e)}+\\
&2\Gamma_{kmr}^{(e)}\Gamma_{lns}^{(e)}\}+2e^{rs}\{\Gamma_{knr}^{(g)}\Gamma_{lms}^{(g)}-\Gamma_{kmr}^{(g)}\Gamma_{lns}^{(g)}-\\
&2\Gamma_{knr}^{(e)}\Gamma_{lms}^{(g)}-2\Gamma_{knr}^{(g)}\Gamma_{lms}^{(e)}+4\Gamma_{knr}^{(e)}\Gamma_{lms}^{(e)}+\\
&2\Gamma_{kmr}^{(e)}\Gamma_{lns}^{(g)}+2\Gamma_{kmr}^{(g)}\Gamma_{lns}^{(e)}-4\Gamma_{kmr}^{(e)}\Gamma_{lns}^{(e)}\}=0
\end{aligned}
\tag{5.4-2}
$$

式中 $\Gamma_{klm}^{(g)}$、$\Gamma_{klm}^{(e)}$ 分别表示基于 g_{kl} 和 e_{kl} 的第一类克里斯托费尔符号，它由(3.1-8a)式定义.

若在(5.4-2)式中舍去 e_{kl} 的乘积项，并以 ε 代替 e，则可得小变形应变张量的相容方程，即圣维南相容方程，

$$
\varepsilon_{kn}|_{lm}+\varepsilon_{lm}|_{kn}-\varepsilon_{km}|_{ln}-\varepsilon_{ln}|_{km}=0 \tag{5.4-3}
$$

(5.4-3)的推导留给读者作为练习.

在§3.8的讨论中曾指出：在三维空间，黎曼-克里斯托费尔张量 R_{klmn} 只有6个不等于0的独立分量，即 R_{1212}、R_{1313}、R_{2323}、R_{1213}、R_{2123}、R_{3132}. 因此(5.4-2)式和(5.4-3)式各有6个分量方程，即下标 $klmn$ 是1212、1313、2323、1213、2123、3132的六个方程. 在直角坐标系，(5.4-3)式可写成

$$
\varepsilon_{kn,lm}+\varepsilon_{lm,kn}-\varepsilon_{km,ln}-\varepsilon_{ln,km}=0 \tag{5.4-4}
$$

其展开式为

$$
\begin{aligned}
&2\varepsilon_{12,12}=\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11}\\
&2\varepsilon_{13,13}=\varepsilon_{11,33}+\varepsilon_{33,11}\\
&2\varepsilon_{23,23}=\varepsilon_{22,33}+\varepsilon_{33,22}\\
&\varepsilon_{13,12}+\varepsilon_{21,13}-\varepsilon_{23,11}=\varepsilon_{11,23}\\
&\varepsilon_{23,12}+\varepsilon_{12,23}-\varepsilon_{13,22}=\varepsilon_{22,13}\\
&\varepsilon_{32,13}+\varepsilon_{13,32}-\varepsilon_{12,33}=\varepsilon_{33,12}
\end{aligned}
\tag{5.4-5}
$$

§5.5 应变张量的一些性质

小变形应变张量 ε_{ij}[(5.3-2)式]是二阶对称张量，因此，它的性质与应力张量 σ^{ij} 是相同的. 下面通过与应力张量对比的方法，讨论小变形应变张量的一些性质.

一、应变张量 ε_{ij} 的主方向、主值、不变量

和应力张量一样，应变张量 ε_{ij}［(5.3－2)式］也有主方向、主值和不变量，它们的推导方法与§4.3相同，这里不重复，只把有关的结果写出.

应变张量的特征方程是

$$(\varepsilon^i_j - \varepsilon\delta^i_j)v_i = 0 \tag{5.5-1}$$

v_i 存在非零解的条件是

$$\det(\varepsilon^i_j - \varepsilon\delta^i_j) = 0 \tag{5.5-2}$$

展开上式，可得 ε 的三次方程为

$$(\varepsilon)^3 - J_1(\varepsilon)^2 + J_2(\varepsilon) - J_3 = 0 \tag{5.5-3}$$

式中 J_1、J_2、J_3 是应变张量的不变量，它们分别是

$$J_1 = \varepsilon^i_i = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} \tag{5.5-4a}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon^i_i\varepsilon^j_j - \varepsilon^i_j\varepsilon^j_i) = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(1)} \tag{5.5-4b}$$

$$J_3 = \det\varepsilon^i_j = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} \tag{5.5-4c}$$

$\varepsilon_{(1)}$、$\varepsilon_{(2)}$、$\varepsilon_{(3)}$ 是方程(5.5－3)式的三个根，即应变张量的本征值，也就是应变张量的主值(主应变). 将 $\varepsilon_{(1)}$、$\varepsilon_{(2)}$、$\varepsilon_{(3)}$ 分别代入(5.5－1)式，可以求出三个本征矢量 $v_{(1)i}$、$v_{(2)i}$、$v_{(3)i}$，它们是应变张量的主方向(主轴). 可以证明，对于各向同性弹性材料，应变张量的主方向与该点应力张量的主方向是一致的.

和应力张量相似，如取应变张量的主方向作为参照标架，则应变张量矩阵成对角矩阵，形式为

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{(3)} \end{bmatrix} \tag{5.5-5}$$

二、偏应变张量

和偏应力张量相似，可以定义偏应变张量(或应变偏量)为

$$e^i_j = \varepsilon^i_j - q\delta^i_j \tag{5.5-6}$$

$$q = \frac{1}{3}\varepsilon^i_i \tag{5.5-7}$$

式中 $q\delta^i_j$ 定义为球应变张量.

偏应变张量也有主值：

$$e_{(1)}=\varepsilon_{(1)}-q,\ e_{(2)}=\varepsilon_{(2)}-q,\ e_{(3)}=\varepsilon_{(3)}-q \tag{5.5-8}$$

$e_{(1)}$、$e_{(2)}$、$e_{(3)}$是下列三次方程的根：

$$-e^3+J'_2e+J'_3=0 \tag{5.5-9}$$

式中

$$J'_1=e_i^i=e_{(1)}+e_{(2)}+e_{(3)}=0 \tag{5.5-10a}$$

$$J'_2=\frac{1}{2}e_j^ie_i^j=\frac{1}{2}(e_{(1)}^2+e_{(2)}^2+e_{(3)}^2) \tag{5.5-10b}$$

$$J'_3=\det e_j^i=e_{(1)}e_{(2)}e_{(3)} \tag{5.5-10c}$$

J'_1、J'_2、J'_3 是偏应变张量的不变量.

三、最大剪应变、八面体剪应变

和应力张量相似，可以计算最大剪应变(也称切应变)、八面体剪应变，只需在最大剪应力和八面体剪应力公式中，以相应的应变张量的分量代替应力张量的分量即可.

四、应变张量的变换法则

应变张量 ε_{ij}[(5.3-2)式]是二阶协变张量，当坐标变换时，它服从二阶协变张量的变换法则.设坐标系 x^i 作容许变换成另一新坐标系 $\bar{x}^i$，则 ε_{ij} 的变换法则为

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\bar{x})=\varepsilon_{kl}(x)\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i}\frac{\partial x^l}{\partial\bar{x}^j} \tag{5.5-11}$$

若坐标变换是在直角坐标系之间进行，其变换方程为[(4.1-12)式]

$$\bar{z}^{i'}=\alpha_j^{i'}z^j$$

逆变换方程为

$$z^i=\beta_{j'}^iz^{j'}$$

则 ε_{ij} 的变换法则为

$$\bar{\varepsilon}_{i'j'}(\bar{z})=\varepsilon_{kl}(z)\beta_{i'}^k\beta_{j'}^l \tag{5.5-12}$$

式中 $\beta_{i'}^j=\alpha_j^{i'}$.

§5.6 应变张量的物理分量

应变张量 ε_{ij}[(5.3-2)式]是二阶协变张量，由(5.1-12)式及(5.1-14)式可知，应变张量由下式定义：

$$ds^2 - dS^2 = 2\varepsilon_{ij}dx^i dx^j \tag{5.6-1}$$

ds^2、dS^2 是标量.坐标的微分是一个矢量,由(2.7-1)式可知,dx^i 的物理分量是$\sqrt{g_{ii}}\,dx^i$(i 不求和),它的量纲是 L.这样(5.6-1)式可写成

$$ds^2 - dS^2 = 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}}(\sqrt{g_{ii}}\,dx^i)(\sqrt{g_{jj}}\,dx^j) \tag{5.6-2}$$

由上式,应变张量的物理分量可以定义为

$$\varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij}\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \quad (i、j\ 不求和) \tag{5.6-3}$$

它们是无量纲的量.

在正交曲线坐标系,由于 $g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$[(1.7-3)式],则应变张量的物理分量是

$$\varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij}\sqrt{g^{ii}}\sqrt{g^{jj}} \quad (i、j\ 不求和) \tag{5.6-4}$$

对于应变张量的混合分量,其物理分量如下式,读者可自行证明

$$\varepsilon_{(j)}^{(i)} = \varepsilon_j^i\frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{jj}}} \quad (i、j\ 不求和) \tag{5.6-5}$$

对于正交曲线坐标系:

$$\varepsilon_{(j)}^{(i)} = \varepsilon_j^i\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g^{jj}} \quad (i、j\ 不求和) \tag{5.6-6}$$

§5.7 圆柱坐标系、球坐标系中的几何方程

现将圆柱坐标系和球坐标系中用物理分量表示的小变形应变张量与位移矢量的关系(变形几何方程)以及小变形应变张量的相容方程列出如下.这些方程是由张量方程(5.3-2)式和(5.4-3)式变换而来的.在§3.8已通过平衡方程举例说明了如何由张量方程变换成在特定的曲线坐标系中以物理分量表示的分量方程.因此,这里只列出通过变换得出的结果.读者可以作为习题,自行从张量方程通过张量语言"翻译"成下列分量方程.

一、圆柱坐标系(图 1-4)

位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 在圆柱坐标系中以物理分量表示为

$$\boldsymbol{u} = u_r\boldsymbol{e}_r + u_\theta\boldsymbol{e}_\theta + u_z\boldsymbol{e}_z \tag{5.7-1}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$ 为单位基矢量.

变形的几何方程为

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{5.7-2a}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \tag{5.7-2b}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{5.7-2c}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right) \tag{5.7-2d}$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) \tag{5.7-2e}$$

$$\varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) \tag{5.7-2f}$$

应变张量的相容方程为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial r \partial z} = 0 \tag{5.7-3a}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta z}}{\partial \theta \partial z} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_{zz}}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} = 0 \tag{5.7-3b}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - 2\frac{\partial^2 (r\varepsilon_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r}\right) = 0 \tag{5.7-3c}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{r\theta}}{\partial z^2} - r\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\left(\frac{1}{r}\varepsilon_{\theta z}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{1}{r}\varepsilon_{zz}\right) = 0 \tag{5.7-3d}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\frac{1}{r}\varepsilon_{rz}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{\theta z})\right] - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}(r^2 \varepsilon_{r\theta}) = 0 \tag{5.7-3e}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rz}}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}(r\varepsilon_{z\theta}) + r\frac{\partial^2}{\partial r \partial z}(r\varepsilon_{\theta\theta}) - \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z}(r\varepsilon_{r\theta}) = 0 \tag{5.7-3f}$$

式中 $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{\theta z}, \varepsilon_{zr}$ 为应变张量的物理分量.

二、球坐标系(图 1-5)

位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 在球坐标系中以物理分量表示为

$$\boldsymbol{u} = u_r\boldsymbol{e}_r + u_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + u_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{5.7-4}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\varphi$、$\boldsymbol{e}_\theta$ 为单位基矢量.

变形几何方程为

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \tag{5.7-5a}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r\right) \tag{5.7-5b}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{u_\varphi \cot\varphi}{r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{5.7-5c}$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) \tag{5.7-5d}$$

$$\varepsilon_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta \cot\varphi}{r}\right) \tag{5.7-5e}$$

$$\varepsilon_{\theta r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) \tag{5.7-5f}$$

应变张量的相容方程为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi^2} - r\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} - 2\frac{\partial^2 (r\varepsilon_{r\varphi})}{\partial r\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r}\right) = 0 \tag{5.7-6a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varepsilon_{\varphi\varphi}) - 2\sin^2\varphi\,\varepsilon_{rr} + r\sin^2\varphi\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r} + \\
&\quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial \theta^2} - 2\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}(\sin\varphi\,\varepsilon_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin^2\varphi\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial \varphi}\right) - \\
&\quad \sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - 2\frac{\partial^2}{\partial \theta\partial \varphi}(\sin\varphi\,\varepsilon_{\varphi\theta}) - 2\sin\varphi\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} = 0
\end{aligned} \tag{5.7-6b}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + \cot\varphi\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{2}{\sin\varphi}\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}(r\varepsilon_{r\theta}) - \\
&\quad 2\cot\varphi\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial r}\right) = 0
\end{aligned} \tag{5.7-6c}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \theta^2} + 2\sin^2\varphi\,\varepsilon_{r\varphi} - r\sin\varphi\frac{\partial^2 \varepsilon_{\theta\varphi}}{\partial r\partial \theta} - \frac{\partial^2}{\partial \theta\partial \varphi}(\sin\varphi\,\varepsilon_{r\theta}) + \\
&\quad r\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial r\partial \varphi}(\sin\varphi\,\varepsilon_{\theta\theta}) - \sin^2\varphi\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial \varphi} - r\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r} = 0
\end{aligned} \tag{5.7-6d}$$

$$\frac{\partial^2(\sin\varphi\varepsilon_{r\theta})}{\partial\varphi^2}+2\sin\varphi\varepsilon_{r\theta}+r\frac{\partial^2\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r\partial\theta}-\cot\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\varepsilon_{r\theta})-$$

$$\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}\left(\frac{\varepsilon_{r\varphi}}{\sin\varphi}\right)-\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial\theta}-\frac{r}{\sin\varphi}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}(\sin^2\varphi\varepsilon_{\theta\varphi})=0$$

(5.7－6e)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varepsilon_{\theta\varphi}}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi}\left(\frac{\varepsilon_{rr}}{\sin\varphi}\right)-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(r\varepsilon_{r\varphi})-$$

$$\sin\varphi\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\left(r\frac{\varepsilon_{r\theta}}{\sin\varphi}\right)=0 \qquad (5.7-6f)$$

上式中 $\varepsilon_{rr},\varepsilon_{\varphi\varphi},\varepsilon_{\theta\theta},\varepsilon_{r\varphi},\varepsilon_{\varphi\theta},\varepsilon_{r\theta}$ 为应变张量的物理分量。

§ 5.8 变形前后体元及面元的变化

物体在未变形状态(初始构形)占据空间某区域 B,物体内任一点 P 的位置由曲线坐标 $X^K(K=1,2,3)$描述,或者由位置矢量 $\boldsymbol{P}$ 描述.变形后,原占据区域 B 的物体(质点集合)进入空间另一区域 b,成为物体变形后的状态(变形后构形),P 点移动到 p,点 p 的位置由另一曲线坐标 $x^k(k=1,2,3)$描述,或者由位置矢量 $\boldsymbol{p}$ 描述(图 5－1).物体由 B 变形到 b 是连续的,初始构形的点 X^K 与变形后构形的点 x^k 是一一对应的,因此有

$$x^k=x^k(X^1,X^2,X^3)\quad(k=1,2,3)\qquad(5.8-1)$$

上式是可逆的,即

$$X^K=X^K(x^1,x^2,x^3)\quad(K=1,2,3)\qquad(5.8-2)$$

这样,在区域 B,雅可比行列式 $\mathscr{J}=\left|\frac{\partial x^i}{\partial X^K}\right|\neq0$.展开为

$$\mathscr{J}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x^1}{\partial X^1}&\frac{\partial x^1}{\partial X^2}&\frac{\partial x^1}{\partial X^3}\\ \frac{\partial x^2}{\partial X^1}&\frac{\partial x^2}{\partial X^2}&\frac{\partial x^2}{\partial X^3}\\ \frac{\partial x^3}{\partial X^1}&\frac{\partial x^3}{\partial X^2}&\frac{\partial x^3}{\partial X^3}\end{vmatrix}\neq0\quad(在区域\ B)\qquad(5.8-3)$$

由(1.9－14)式,(5.8－3)式可写成

$$\mathscr{J}\in_{IJK}=\in_{ijk}\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J}\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\qquad(5.8-4)$$

偏导数

$$x^k{}_{,K}(X) \equiv \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \tag{5.8-5}$$

称为变形梯度，$\mathscr{J}$ 是变形梯度行列式. 由(5.8－1)式，有

$$\mathrm{d}x^k = \frac{\partial x^k}{\partial X^K}\mathrm{d}X^K \tag{5.8-6}$$

由此可以看出，$\frac{\partial x^k}{\partial X^K}$描述初始状态线元 $\mathrm{d}X^k$ 变形到终态(变形后状态)的线元 $\mathrm{d}x^k$，即$\frac{\partial x^k}{\partial X^K}$描述了质点邻域的变形，因此称为变形梯度；它是两点张量(见 § 3.9).

已知变形梯度$\frac{\partial x^k}{\partial X^K}$，可以得到变形后体元的变化. 设由初始构形取平行六面体体元，它的三个棱边分别为 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{R}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Q} = \mathrm{d}Q^I\boldsymbol{G}_I, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \mathrm{d}R^J\boldsymbol{G}_J, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S^K\boldsymbol{G}_K \tag{5.8-7}$$

由(1.11－16)式可知，六面体体元的体积为

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\boldsymbol{Q}\times\mathrm{d}\boldsymbol{R}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}Q^I\mathrm{d}R^J\mathrm{d}S^K \in_{IJK} \tag{5.8-8}$$

线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{Q}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{R}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 变形后成为 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，

$$\mathrm{d}q^i = \frac{\partial x^i}{\partial X^I}\mathrm{d}Q^I, \quad \mathrm{d}r^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^J}\mathrm{d}R^J, \quad \mathrm{d}s^k = \frac{\partial x^k}{\partial X^K}\mathrm{d}S^K \tag{5.8-9}$$

变形后，以 $\mathrm{d}\boldsymbol{q}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 为棱边的体元的体积为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v &= \mathrm{d}\boldsymbol{q}\times\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}q^i\mathrm{d}r^j\mathrm{d}s^k \in_{ijk} \\ &= \mathrm{d}Q^I\mathrm{d}R^J\mathrm{d}S^K\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J}\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\in_{ijk}\end{aligned} \tag{5.8-10}$$

由(5.8－4)式得

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J}\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\in_{ijk} = \mathscr{J}\in_{IJK}$$

因此

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}Q^I\mathrm{d}R^J\mathrm{d}S^K\in_{IJK}\mathscr{J} = \mathscr{J}\mathrm{d}V \tag{5.8-11}$$

上式表明，$\mathscr{J}$ 表示变形前后体元的体积之比. 若初始构形物体介质的密度为 ρ_0，变形后的密度为 ρ，根据质量守恒定律，

$$\rho_0\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}v \tag{5.8-12}$$

由(5.8－11)和(5.8－12)式，有

$$\mathscr{J} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}V} = \frac{\rho_0}{\rho} \tag{5.8-13}$$

已知 $\mathscr{J}$,还可以得到初始构形和变形后构形的面元之间的关系.设在初始构形,有过 P 点的两线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R} = \mathrm{d}R^J \boldsymbol{G}_J, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}S^K \boldsymbol{G}_K$$

变形后,P 的对应点为 p,与线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 对应的线元分别是 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$.在初始构形,面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{A} &= \mathrm{d}\boldsymbol{R} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}R^J \boldsymbol{G}_J \times \mathrm{d}S^K \boldsymbol{G}_K \\ &= \mathrm{d}R^J \mathrm{d}S^K \in_{JKI} \boldsymbol{G}^I \end{aligned} \tag{5.8-14}$$

面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的协变分量为

$$\mathrm{d}A_I = \mathrm{d}R^J \mathrm{d}S^K \in_{JKI} \tag{5.8-15a}$$

也可写成

$$N_I \mathrm{d}A = \mathrm{d}R^J \mathrm{d}S^K \in_{JKI} \tag{5.8-15b}$$

式中 $\boldsymbol{N}$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的单位外法矢,$\mathrm{d}A$ 为面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}$ 的面积,$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{N}\mathrm{d}A$.变形后,以线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 为边的面元为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mathrm{d}r^j \mathrm{d}s^k \in_{jki} \boldsymbol{g}^i \tag{5.8-16}$$

面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的协变分量为

$$\mathrm{d}a_i = \mathrm{d}r^j \mathrm{d}s^k \in_{jki} = n_i \mathrm{d}a \tag{5.8-17}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的单位外法矢,$\mathrm{d}a$ 为面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的面积,$\mathrm{d}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{n}\mathrm{d}a$.将(5.8-9)式中的后二式代入(5.8-17)式,有

$$\mathrm{d}a_i = \frac{\partial x^j}{\partial X^J}\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\mathrm{d}R^J \mathrm{d}S^K \in_{jki} \tag{5.8-18}$$

将上式乘以变形梯度 $\dfrac{\partial x^i}{\partial X^I}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^i}{\partial X^I}\mathrm{d}a_i &= \frac{\partial x^i}{\partial X^I}\frac{\partial x^j}{\partial X^J}\frac{\partial x^k}{\partial X^K}\mathrm{d}R^J \mathrm{d}S^K \in_{jki} \\ &= \mathscr{J} \in_{JKI} \mathrm{d}R^J \mathrm{d}S^K = \mathscr{J}\mathrm{d}A_I \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^I}\mathrm{d}a_i = \mathscr{J}\mathrm{d}A_I \tag{5.8-19a}$$

或

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^I} n_i \mathrm{d}a = \mathscr{J} N_I \mathrm{d}A \tag{5.8-19b}$$

由此可得

$$da_i = \frac{\partial X^I}{\partial x^i} \mathcal{J} dA_I \tag{5.8-20a}$$

或

$$n_i da = \frac{\partial X^I}{\partial x^i} \mathcal{J} N_I dA \tag{5.8-20b}$$

§5.9 大变形的应力张量

在变形后构形中取微四面体元(图 5-4),它的棱边是经过 p 点的坐标曲线上的线元 $\overline{pa}$, $\overline{pb}$, $\overline{pc}$. 面元 $d\boldsymbol{a}$ 上的力矢量为 $d\boldsymbol{F}$,面元 $d\boldsymbol{a}$ 的协变分量是 da_i($i=1,2,3$)(见§4.1). 设 p 点的应力张量为 σ^{ij},由(4.1-6)式有

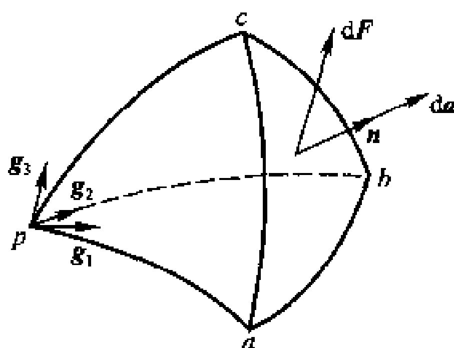


图 5-4

$$dF^i = \sigma^{ij} da_j = \sigma^{ij} n_j da \tag{5.9-1}$$

图中 $\boldsymbol{n}$ 为面元 da 的单位外法矢. σ^{ij} 是在变形后构形上定义的,称为欧拉应力张量,代表真实的应力. 讨论小变形问题时,由于位移和位移对 X^I(或 x^i)的偏导数(或协变导数)是微小的量,因而可以略去变形前后物体构形的变化,即略去初坐标和终坐标的差别. 因此,可以取变形前(初始构形)单位面积上的力为欧拉应力(真实应力). 在大变形问题中,则必须考虑变形对物体构形的影响,但变形后的构形是未知的(待定的). 为了研究方便,将作用于变形后物体面元上的力矢量假想地按某种方式作用在初始构形对应的面元上,所产生的应力称为"名义应力". 在初始构形上确定名义应力之后,根据已知的一一对应关系,就可求出作用在变形后物体上的真实应力.

(5.8-19b)式给出:

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^I} n_i \mathrm{d}a = \mathscr{J} N_I \mathrm{d}A \tag{5.8-19b}$$

式中 dA 为与面元 da 对应的初始构形中面元 dA 的面积，**N** 为 dA 的单位外法矢. 将(5.8－19b)式乘以$\frac{\partial X^I}{\partial x^j}$，有

$$\frac{\partial X^I}{\partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial X^I} n_i \mathrm{d}a = \mathscr{J} \frac{\partial X^I}{\partial x^j} N_I \mathrm{d}A$$

即

$$n_j \mathrm{d}a = \mathscr{J} \frac{\partial X^I}{\partial x^j} N_I \mathrm{d}A \tag{5.9-2}$$

将(5.9－2)式代入(5.9－1)式，有

$$\mathrm{d}F^i = \sigma^{ij} \mathscr{J} \frac{\partial X^I}{\partial x^j} N_I \mathrm{d}A \tag{5.9-3}$$

令

$$T^{iJ} = \mathscr{J} \frac{\partial X^J}{\partial x^j} \sigma^{ij} \tag{5.9-4}$$

将(5.9－3)式等号右边的求和指标 I 更换为 J，则有

$$\mathrm{d}F^i = T^{iJ} N_J \mathrm{d}A \tag{5.9-5}$$

T^{iJ} 称为拉格朗日应力张量，或第一类皮奥拉－基尔霍夫(Piola－Kirchhoff)应力张量. 由(5.9－5)式可以看出，T^{iJ} 是在初始构形上定义的名义应力. 由(5.9－4)式有

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\mathscr{J}} T_i^{\ M} \frac{\partial x_j}{\partial X^M} \tag{5.9-6}$$

(5.9－4)式表明拉格朗日应力张量 T^{iJ} 不是对称张量. 将 T^{iJ} 作为初始构形上的应力张量，在建立本构方程时(见第六章)是不合适的. 因为§5.1指出：应变张量总是对称张量，这就要求应力张量要有对称性.

下面引入对称的应力张量——基尔霍夫应力张量，或第二类皮奥拉－基尔霍夫应力张量. 将(5.9－4)式乘以$\frac{\partial X^I}{\partial x^i}$，则有

$$\frac{\partial X^I}{\partial x^i} T^{iJ} = \mathscr{J} \frac{\partial X^I}{\partial x^i} \frac{\partial X^J}{\partial x^j} \sigma^{ij} \tag{5.9-7}$$

令

$$S^{IJ} = \frac{\partial X^I}{\partial x^i} T^{iJ} \tag{5.9-8}$$

则有

$$S^{IJ}=\mathscr{J}\frac{\partial X^I}{\partial x^m}\frac{\partial X^J}{\partial x^n}\sigma^{mn} \tag{5.9-9}$$

式中 S^{IJ} 称为基尔霍夫应力张量，或第二类皮奥拉－基尔霍夫应力张量．由(5.9－9)式可以看出，S^{IJ} 是二阶对称张量．由(5.9－9)式有

$$\sigma^{ij}=\frac{1}{\mathscr{J}}S^{KL}\frac{\partial x^i}{\partial X^K}\frac{\partial x^j}{\partial X^L} \tag{5.9-10}$$

对于直角坐标系有

$$T_{iJ}=\mathscr{J}\frac{\partial X_J}{\partial x_m}\sigma_{im}\,,\quad S_{IJ}=\mathscr{J}\frac{\partial X_I}{\partial x_m}\frac{\partial X_J}{\partial x_n}\sigma_{mn} \tag{5.9-11}$$

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{\mathscr{J}}\frac{\partial x_j}{\partial X_M}T_{iM}\,,\quad \sigma_{ij}=\frac{1}{\mathscr{J}}\frac{\partial x_i}{\partial X_K}\frac{\partial x_j}{\partial X_L}S_{KL} \tag{5.9-12}$$

对于非线性弹性力学问题，有拉格朗日应力张量的平衡方程和边界条件，以及基尔霍夫应力张量的平衡方程和边界条件．这些是“非线性弹性理论”讨论的范围．

习　题

1．推导欧拉应变张量表示式

$$e_{kl}=\frac{1}{2}(u_k|_l+u_l|_k-u_m|_k u^m|_l)$$

2．证明：线元 ds 的伸长率 $e_1=1-\sqrt{1-2e_{11}}$［(5.2－10)式］，变形后相互正交的两个线元 ds,ds 在变形前的夹角为 $\frac{\pi}{2}-\beta_{12}$，

$$\sin\beta_{12}=\frac{2e_{12}}{\sqrt{1-2e_{11}}\sqrt{1-2e_{22}}} \tag{5.2-11}$$

式中 e_{11},e_{22},e_{12} 是欧拉应变张量的分量．

3．小变形情况下转动矢量 $\boldsymbol{\omega}$（转动张量的反偶矢量）与位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\mathrm{curl}\ \boldsymbol{u} \tag{5.3-66}$$

求证：在正交曲线坐标系中转动矢量（以物理分量表示）如下式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\mathrm{curl}\ \boldsymbol{u}=&\frac{1}{2\sqrt{g_{22}g_{33}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g_{33}}u^{(3)})-\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g_{22}}u^{(2)})\right]\boldsymbol{e}_1+\\&\frac{1}{2\sqrt{g_{33}g_{11}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^3}(\sqrt{g_{11}}u^{(1)})-\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{33}}u^{(3)})\right]\boldsymbol{e}_2+\\&\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(\sqrt{g_{22}}u^{(2)})-\frac{\partial}{\partial x^2}(\sqrt{g_{11}}u^{(1)})\right]\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

4．由直角坐标系中的小变形应变张量表示式(5.3－3′)，通过消去位移矢量 u_1，u_2，u_3，推导应变张量的相容方程(5.4－5)式．

5．在直角坐标系中应变张量的相容方程(5.4－4)的展开式为

$$S_{11}=2\varepsilon_{23,23}-\varepsilon_{22,33}-\varepsilon_{33,22}=0$$

$$S_{22}=2\varepsilon_{31,31}-\varepsilon_{33,11}-\varepsilon_{11,33}=0$$

$$S_{33}=2\varepsilon_{12,12}-\varepsilon_{11,22}-\varepsilon_{22,11}=0$$

$$S_{12}=\varepsilon_{33,12}+\varepsilon_{12,33}-\varepsilon_{23,31}-\varepsilon_{31,32}=0$$

$$S_{23}=\varepsilon_{11,23}+\varepsilon_{23,11}-\varepsilon_{31,12}-\varepsilon_{12,13}=0$$

$$S_{31}=\varepsilon_{22,31}+\varepsilon_{31,22}-\varepsilon_{12,23}-\varepsilon_{23,21}=0$$

求证：以上各式并不是彼此独立的，它们满足以下条件：

$$S_{11,1}+S_{12,2}+S_{13,3}=0$$

$$S_{21,1}+S_{22,2}+S_{23,3}=0$$

$$S_{31,1}+S_{32,2}+S_{33,3}=0$$

6．从张量方程(5.3－2)和(5.4－3)式出发，推导平面极坐标系中以物理分量表示的变形几何方程和应变张量的相容方程．

提示：在推导相容方程前，应当推导二阶张量 A_{mn} 的二阶协变导数(即 $A_{mn}|_{ij}$)的计算公式．

7．从张量方程(5.3－2)和(5.4－3)出发，推导圆柱坐标系中以物理分量表示的变形几何方程(5.7－2)和应变张量的相容方程(5.7－3)．

8．从张量方程(5.3－2)和(5.4－3)出发，推导球坐标系中以物理分量表示的变形几何方程(5.7－5)和应变张量的相容方程(5.7－6)．

第六章　应力－应变关系

§6.1　广义胡克定律、弹性张量

一、弹性张量

应力－应变关系是材料的力学性质的数学描述，也是表示材料力学性质的物理方程.

现讨论线弹性材料.应力张量的分量 σ^{ij} 是应变张量分量 ε_{lm} 的线性函数：

$$\sigma^{ij} = E^{ijlm}\varepsilon_{lm} \tag{6.1-1}$$

这是一般各向异性体的广义胡克定律.(6.1－1)式左边 σ^{ij} 是二阶逆变张量，右边的 ε_{lm} 是二阶协变张量，根据商法则，E^{ijlm} 是一个四阶逆变张量，称为弹性张量.上标 i、j、l、m 的范围都是1、2、3，因此 E^{ijlm} 有 $3^4=81$ 个分量.由于材料是均匀的，E^{ijlm} 不随坐标而变化，所以它的分量是常数，称为弹性常数.E^{ijlm} 的81个分量并不是彼此不同的.由于 $\sigma^{ij}=\sigma^{ji}$[(4.1－8)式]，而 $\sigma^{ij}=E^{ijlm}\varepsilon_{lm}$，$\sigma^{ji}=E^{jilm}\varepsilon_{lm}$，因此有

$$E^{ijlm} = E^{jilm} \tag{6.1-2}$$

由于 $\varepsilon_{lm}=\varepsilon_{ml}$[(5.3－2)式]，则

$$\sigma^{ij} = E^{ijlm}\varepsilon_{lm} = E^{ijml}\varepsilon_{ml} = E^{ijml}\varepsilon_{lm}$$

上式第二个等号左边 l、m 都是哑指标，因此可以互换，成为该等号右边的表达式，这样，便有

$$E^{ijlm} = E^{ijml} \tag{6.1-3}$$

综合(6.1－2)、(6.1－3)式，则有

$$E^{ijlm} = E^{jilm} = E^{jiml} = E^{ijml} \tag{6.1-4}$$

上式表明，在每对上标 i、j 之间和 l、m 之间，可以分别交换次序.这样，E^{ijlm} 的上标 i、j 和 l、m 各只有6对不同的数：1、1，1、2，1、3，2、2，2、3，3、3，所以 E^{ijlm} 至多有 $6^2=36$ 个不同的分量.

由于应变能密度的存在，E^{ijlm} 的不同的分量数将进一步减少.

二、弹性体的应变能密度

考虑到外力作用于弹性体是缓慢的加载过程，物体的动能和因弹性变形引起的热效应可忽略不计．这样，外力在物体变形过程中所作的功全部转化为变形势能储存在弹性体内．外力卸载后，变形势能全部释放出来使弹性体恢复到初始状态．

现计算外力在物体变形过程中所作的功 A．设外力在加载过程中，微元体的位移由 $\boldsymbol{u}(t)$ 增加为 $\boldsymbol{u}(t)+\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，则相应于 $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，外力（体力 $\boldsymbol{F}$ 和表面力 $\boldsymbol{P}$）对物体所作的功为

$$\int_V \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}V+\int_S \boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{u}\mathrm{d}S=\int_V F^i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}V+\int_S P^i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}S$$

上式中，V 和 S 分别是物体的体积和表面积．外力由 0 逐渐增大到终值，位移场由 0（初始状态）增大到最终变形状态 u_i，外力对物体所作的功为

$$A=\int_0^{u_i}\left(\int_V F^i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}V+\int_S P^i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}S\right) \tag{a}$$

而

$$\begin{aligned}\int_S P^i\mathrm{d}u_i\mathrm{d}S&=\int_S\sigma^{ij}n_j\mathrm{d}u_i\mathrm{d}S=\int_V(\sigma^{ij}\mathrm{d}u_i)|_j\mathrm{d}V\\&=\int_V(\sigma^{ij}|_j\mathrm{d}u_i+\sigma^{ij}\mathrm{d}u_i|_j)\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{b}$$

将(b)式代入(a)式，由于(4.2－2)式，可得

$$\begin{aligned}A&=\int_0^{u_i}\int_V\sigma^{ij}\mathrm{d}u_i|_j\mathrm{d}V\\&=\int_0^{u_i}\int_V\sigma^{ij}\frac{1}{2}(\mathrm{d}u_i|_j+\mathrm{d}u_j|_i)\mathrm{d}V\\&=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\int_V\sigma^{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{c}$$

式中 ε^{ij} 为相应于位移场 u_i 的应变场．求 A 对体积 V 的导数，则

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}V}=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma^{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{d}$$

引进应变能密度函数 $W(\varepsilon_{ij})$，使

$$\frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}}=\sigma^{ij} \tag{6.1－5}$$

则(d)式右端的被积函数成为全微分

$$\sigma^{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}=\mathrm{d}W \tag{e}$$

这样

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}V}=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\mathrm{d}W=W(\varepsilon_{ij})-W(0) \tag{f}$$

式中 $W(0)$和 $W(\varepsilon_{ij})$分别表示物体在初始状态和变形后状态的应变能密度. $W(0)$的值并不重要,我们关注的是 W 的偏导数,因此令 $W(0)=0$,可得

$$W(\varepsilon_{ij})=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma^{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{6.1-6}$$

(f)式表明:(1) 物体在变形过程中储存的应变能密度等于单位体积的外力功;(2) 物体内的应变能密度只与物体的初始状态和变形后状态有关,与加载过程无关,因此,$W(\varepsilon_{ij})$[(6.1-6)式]是一个状态函数.

对于线弹性材料,应力-应变关系为(6.1-1)式,这样,

$$W(\varepsilon_{ij})=\int_0^{\varepsilon_{ij}}E^{ijlm}\varepsilon_{lm}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{g}$$

由于应变能密度与加载过程无关,可以认为外力按比例加载.应变张量的各分量以相同比例 α 增大;α 由 0 增大到 1,$\alpha\varepsilon_{ij}$,$\alpha\varepsilon_{lm}$ 由 0 分别增大到终值 ε_{ij},ε_{lm}. 这样,对(g)式积分,得

$$\begin{aligned}W(\varepsilon_{ij})&=\int_0^1 E^{ijlm}\alpha\varepsilon_{lm}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{1}{2}E^{ijlm}\varepsilon_{lm}\varepsilon_{ij}\end{aligned} \tag{6.1-7}$$

因此,$W(\varepsilon_{ij})$是应变张量分量的二次齐次式. 对 $W(\varepsilon_{ij})$求二阶连续偏导数,由于求导次序可交换,即

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{lm}}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)=\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}}\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{lm}}\right) \tag{h}$$

则

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{lm}}=\frac{\partial \sigma^{lm}}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{j}$$

由(6.1-1)式,

$$\sigma^{lm}=E^{lmij}\varepsilon_{ij} \tag{k}$$

将(6.1-1)式和(k)式代入(j)式,得

$$E^{ijlm}=\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \varepsilon_{lm}}=\frac{\partial \sigma^{lm}}{\partial \varepsilon_{ij}}=E^{lmij} \tag{l}$$

即

$$E^{ijlm} = E^{lmij} \tag{6.1-8}$$

这表明,除(6.1-4)式表示的对称性外,E^{ijlm} 的一对上标 ij 和另一对上标 lm 可互换,而其值不变.这样,由于应变能密度的存在,E^{ijlm} 的不同的分量数目从 36 个减少到 21 个,这是各向异性弹性体的弹性张量的不同的分量数目.

§6.2 各向同性弹性体的弹性张量

各向同性弹性体是指物体内各点在各个方向上弹性性质是相同的.对于各向同性弹性体,弹性张量 E^{ijlm} 的不同的分量数将减少到只有 2 个,本节对此加以证明.证明时采用直角坐标系,但仍用上标和下标书写,得出的结果用普遍张量表示,这样可适用于各种曲线坐标系.

设直角坐标系 z^i 绕原点旋转,(作正交变换)变换为新坐标系 $\bar{z}^i$,变换方程为

$$\bar{z}^i = \alpha^i_p z^p \tag{6.2-1}$$

式中变换系数 α^i_p 是坐标轴 $\bar{z}^i$ 与 z^p 方向的单位矢量间夹角的方向余弦,见(1.10-2)式,

$$\alpha^i_p = \cos(\bar{z}^i, z^p) \tag{6.2-2}$$

坐标系作上述变换时,弹性张量 E^{ijlm} 按以下的变换法则变换:

$$\bar{E}^{ijlm} = \alpha^i_p \alpha^j_q \alpha^l_r \alpha^m_s E^{pqrs} \tag{6.2-3}$$

由于物体是各向同性的,因此坐标系旋转后,E^{ijlm} 应当保持不变,即坐标系旋转后,弹性张量 E^{ijlm} 变换为自身.

将坐标系绕 z^3 轴旋转 180°,则由(6.2-2)式可知,α^i_p 的 9 个分量中只有以下 3 个分量有值:

$$\alpha^1_1 = -1,\quad \alpha^2_2 = -1,\quad \alpha^3_3 = 1$$

其余 6 个分量均为 0.

若指标 i、j、l、m 是下列情况之一:

(1) 指标中的任何 3 个等于 1,另一个等于 3;

(2) 指标中的任何 3 个等于 2,另一个等于 3;

(3) 指标中的任何 2 个等于 1,另 2 个分别等于 2 和 3;

(4) 指标中的任何 2 个等于 2,另 2 个分别等于 1 和 3;

则由(6.2-3)可知,在上述四种情况的任一情况下有

$$\bar{E}^{ijlm} = -E^{ijlm}$$

这与物体的各向同性性质是矛盾的，因此在上述几种情况下，必然是

$$E^{ijlm}=0$$

将坐标系分别绕 z^1 轴和 z^2 轴旋转 180°，可得出类似上述的结果．由这些结果，并根据(6.1－8)式，则 E^{ijlm} 不等于 0 的分量是以下 9 个：

$$E^{1111},\ E^{2222},\ E^{3333}$$

$$E^{1122},\ E^{1133},\ E^{2233}$$

$$E^{1212},\ E^{1313},\ E^{2323}$$

将坐标系绕 z^3 轴旋转 90°，则由(6.2－2)式可知，α_p^i 的 9 个分量中只有以下 3 个不等于 0，即

$$\alpha_2^1=-1,\ \alpha_1^2=1,\ \alpha_3^3=1$$

由(6.2－3)式可以得出以下的关系，

$$E^{1111}=E^{2222}$$

$$E^{1133}=E^{2233}$$

$$E^{1313}=E^{2323}$$

将坐标系分别绕 z^1 轴和 z^2 轴旋转 90°，可得类似的结果．将这些结果汇集，可得以下的关系式，

$$E^{1111}=E^{2222}=E^{3333}$$

$$E^{1122}=E^{2233}=E^{1133}$$

$$E^{1212}=E^{2323}=E^{1313}$$

这样，E^{ijlm} 的不等于 0 的不同分量减少到只有 3 个，分别以 E^{1111}、E^{1122}、E^{1212} 表示它们．这样，应力－应变关系(6.1－1)式可表示为

$$\sigma^{11}=E^{1111}\varepsilon_{11}+E^{1122}(\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$$

$$=E^{1122}\varepsilon_{mm}+(E^{1111}-E^{1122})\varepsilon_{11} \tag{6.2-4a}$$

$$\sigma^{22}=E^{1122}\varepsilon_{mm}+(E^{1111}-E^{1122})\varepsilon_{22} \tag{6.2-4b}$$

$$\sigma^{33}=E^{1122}\varepsilon_{mm}+(E^{1111}-E^{1122})\varepsilon_{33} \tag{6.2-4c}$$

$$\sigma^{12}=E^{1212}(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21})=2E^{1212}\varepsilon_{12} \tag{6.2-4d}$$

$$\sigma^{13}=2E^{1212}\varepsilon_{13} \tag{6.2-4e}$$

$$\sigma^{23}=2E^{1212}\varepsilon_{23} \tag{6.2-4f}$$

式中

$$\varepsilon_{mm}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33} \tag{6.2-5}$$

将坐标系绕 z^3 轴按逆时针方向旋转 θ 角，则变换系数 α_p^i 为

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^1=\cos\theta, \quad \alpha_2^1=\sin\theta, \quad \alpha_3^1=0 \\
&\alpha_1^2=-\sin\theta, \quad \alpha_2^2=\cos\theta, \quad \alpha_3^2=0 \\
&\alpha_1^3=0, \quad \alpha_2^3=0, \quad \alpha_3^3=1
\end{aligned} \tag{6.2-6}$$

按照应力张量的变换法则(4.1－12)式和应变张量的变换法则(5.5－12)式,在新坐标系 $\bar{z}^i$ 中,应力分量 $\bar{\sigma}^{12}(\bar{z})$ 和应变分量 $\bar{\varepsilon}^{12}(\bar{z})$ 分别是

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^{12}(\bar{z}) &= -\sigma^{11}\sin\theta\cos\theta+\sigma^{22}\cos\theta\sin\theta+\sigma^{12}\cos^2\theta-\sigma^{21}\sin^2\theta \\
&= -\frac{1}{2}(\sigma^{11}-\sigma^{22})\sin 2\theta+\sigma^{12}\cos 2\theta
\end{aligned} \tag{6.2-7}$$

$$\bar{\varepsilon}_{12}(\bar{z}) = -\frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\sin 2\theta+\varepsilon_{12}\cos 2\theta \tag{6.2-8}$$

坐标系旋转后,对于各向同性弹性体,E^{ijlm} 应当保持不变,因此下述关系式仍成立:

$$\bar{\sigma}^{12}(\bar{z}) = 2E^{1212}\bar{\varepsilon}_{12}(\bar{z}) \tag{6.2-9}$$

将(6.2－7)、(6.2－8)式代入上式,得

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(\sigma^{11}-\sigma^{22})\sin 2\theta+\sigma^{12}\cos 2\theta \\
&= 2E^{1212}\left[-\frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\sin 2\theta+\varepsilon_{12}\cos 2\theta\right]
\end{aligned}$$

由(6.2－4d)式,上式化成

$$\sigma^{11}-\sigma^{22} = 2E^{1212}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}) \tag{6.2-10}$$

将(6.2－4a)式减(6.2－4b)式,得

$$\sigma^{11}-\sigma^{22} = (E^{1111}-E^{1122})(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}) \tag{6.2-11}$$

比较(6.2－10)式与(6.2－11)式可得

$$E^{1111}-E^{1122} = 2E^{1212} \tag{6.2-12}$$

由此证明,对于各向同性弹性体,E^{ijlm} 的不等于 0 的独立分量只有 2 个.如以 λ、μ 分别表示这两个独立的弹性常数:

$$\lambda = E^{1122} \tag{6.2-13}$$

$$\mu = E^{1212} \tag{6.2-14}$$

则

$$\lambda+2\mu = E^{1111} \tag{6.2-15}$$

λ、μ 称为拉梅常数.

归纳以上的讨论结果,可知弹性张量 E^{ijlm} 的分量为

$$E^{ijlm}=\begin{cases}\lambda+2\mu & i=j=l=m\\ \lambda & i=j\neq l=m\\ \mu & i=l\neq j=m\end{cases}\tag{6.2-16}$$

上式可写成统一的表示式：

$$E^{ijlm}=\lambda\delta^{ij}\delta^{lm}+\mu(\delta^{il}\delta^{jm}+\delta^{im}\delta^{jl})\tag{6.2-17}$$

这是直角坐标系中弹性张量的表示式．在直角坐标系中，度量张量就是克罗内克符号，因此可将上式中的克罗内克符号改换成度量张量：

$$E^{ijlm}=\lambda g^{ij}g^{lm}+\mu(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl})\tag{6.2-18}$$

(6.2－18)式是以普遍张量表示的弹性张量，它在各种曲线坐标系中成立．

由(6.2－18)式，则应力、应变关系可写成下式：

$$\begin{aligned}\sigma^{ij}&=[\lambda g^{ij}g^{lm}+\mu(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl})]\varepsilon_{lm}\\&=\lambda g^{ij}\varepsilon_m^m+2\mu\varepsilon^{ij}\end{aligned}\tag{6.2-19}$$

上式两边乘以基本度量张量 g_{jk}，则可将指标 j 下降．更换指标后，可写成

$$\sigma_j^i=\lambda\varepsilon_m^m\delta_j^i+2\mu\varepsilon_j^i\tag{6.2-20}$$

式中

$$\varepsilon_m^m=\varepsilon_1^1+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^3\tag{6.2-21}$$

若在(6.2－20)式中令 $j=i$，进行缩并，可得

$$\sigma_i^i=(3\lambda+2\mu)\varepsilon_m^m\tag{6.2-22}$$

将(6.2－22)式代入(6.2－20)式，可得

$$2\mu\varepsilon_j^i=\sigma_j^i-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\sigma_m^m\delta_j^i\tag{6.2-23}$$

式中

$$\sigma_m^m=\sigma_1^1+\sigma_2^2+\sigma_3^3\tag{6.2-24}$$

(6.2－20)、(6.2－23)式是广义胡克定律，前者以应变张量表示应力张量，后者以应力张量表示应变张量．这两个式子都是以普遍张量的形式表示的，它们在各种曲线坐标系中成立．而拉梅常数 λ、μ 与坐标系的选择无关．

§6.3 弹性常数的物理意义

为了便于说明弹性常数的物理意义，在本节的讨论中，应力张量的分量和应变张量的分量均采用直角坐标进行描述．因此，在本节的讨论中，

应力张量和应变张量的指标都用下标.

一、单向拉伸

设物体沿 x^1 方向受单向拉伸,应力张量 σ_{ij} 的分量只有 $\sigma_{11}\neq 0$,其余的分量均等于 0. 由(6.2-23)式可得:

$$2\mu\varepsilon_{11}=\sigma_{11}-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\sigma_{11}=\frac{2(\lambda+\mu)}{3\lambda+2\mu}\sigma_{11}$$

这样

$$\frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}=E \tag{6.3-1}$$

E 称为杨氏(Young)模量(弹性模量),或称为拉伸弹性模量,$E>0$.

由(6.2-23)式及(6.3-1)式可得

$$2\mu\varepsilon_{22}=-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\sigma_{11}=-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\varepsilon_{11}$$

因此

$$\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}=-\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}=-\nu \tag{6.3-2a}$$

同理可得

$$\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}}=-\nu \tag{6.3-2b}$$

由(6.3-2a、b)式可知,受轴向拉伸的试件,其侧向收缩,侧向应变等于常数 ν 与轴向应变的乘积并冠以负号,$\nu>0$. 常数

$$\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \tag{6.3-3}$$

称为泊松(Poisson)比.

由(6.3-1)式和(6.3-3)式可知,拉梅常数 λ、μ 可以用杨氏模量 E 及泊松比 ν 来表示:

$$\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{6.3-4}$$

$$\mu=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6.3-5}$$

二、纯剪

设物体内应力张量 σ_{ij} 的分量只有 $\sigma_{12}=\sigma_{21}\neq 0$,其余的分量均等于 0,则由(6.2-20)式得

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

即

$$\frac{\sigma_{12}}{2\varepsilon_{12}} = \frac{\sigma_{12}}{\gamma_{12}} = \mu = \frac{\text{剪应力}}{\text{直角的改变}} = G \tag{6.3-6}$$

常数 G 是剪应力与对应的两线元间直角的改变(剪应变 γ)之比,称为剪切模量,$G>0$.

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6.3-7}$$

三、静水应力状态

所谓静水应力状态是指 $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=p$, $\sigma_{12}=\sigma_{23}=\sigma_{13}=0$,即物体各方向均匀受力,由(6.2-22)式可知

$$p = \frac{3\lambda+2\mu}{3}\varepsilon_{mm} = K\varepsilon_{mm} \tag{6.3-8}$$

在小应变情况下,$\varepsilon_{mm}=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}$ = 体积应变,即物体每单位体积的体积变化.因此(6.3-8)式称为体积应变定律.常数 K 称为体积模量,由(6.3-4)、(6.3-5)式得

$$K = \frac{3\lambda+2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{6.3-9}$$

这样(6.3-8)式可写成

$$\varepsilon_{mm} = \frac{3(1-2\nu)}{E}p \tag{6.3-10}$$

如物体三向受拉,则 $\sigma_{11}>0$, $\sigma_{22}>0$, $\sigma_{33}>0$, $p>0$,这时,物体体积增大,$\varepsilon_{mm}>0$.因此,$K>0$.由(6.3-9)式可知

$$\nu < \frac{1}{2} \tag{6.3-11}$$

由此可知,ν 有上下限:

$$0 < \nu < \frac{1}{2} \tag{6.3-12}$$

这样,由(6.3-4)、(6.3-5)式可知

$$\lambda>0,\ \mu>0, \tag{6.3-13}$$

(6.3-1)、(6.3-3)~(6.3-5)、(6.3-7)、(6.3-9)各式表示弹性常数 E、ν、G、K 与 λ、μ 的关系.各向同性弹性体只有两个独立的弹性常数,E、ν、G、K、λ、μ 中任一常数可由另外任意两个常数表示,它们的关

系如下面所示.通常应用最广泛的是杨氏模量 E 和泊松比 ν,或拉梅常数 λ、μ.现将它们之间的关系列出如下:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \\
\mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = G \\
E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu} \\
\nu &= \frac{E-2G}{2G} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\
K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} = \frac{3\lambda+2\mu}{3}
\end{aligned}\right\} \tag{6.3-14}$$

§6.4 各向同性弹性体的广义胡克定律

(6.2-18)式是以拉梅常数 λ、μ 表示的弹性张量.(6.2-20)、(6.2-23)式是以 λ、μ 表示的广义胡克定律.由(6.3-4)、(6.3-5)式,弹性张量 E^{ijlm} 和广义胡克定律也可以用弹性常数 E、ν 表示.

$$E^{ijlm} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}g^{ij}g^{lm} + g^{il}g^{jm} + g^{im}g^{jl}\right) \tag{6.4-1}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^{ij} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{2\nu}{1-2\nu}g^{ij}g^{lm} + g^{il}g^{jm} + g^{im}g^{jl}\right)\varepsilon_{lm} \\
&= \frac{E}{2(1+\nu)}\left(2\varepsilon^{ij} + \frac{2\nu}{1-2\nu}g^{ij}\varepsilon_m^m\right)
\end{aligned} \tag{6.4-2}$$

广义胡克定律也可以用应力张量和应变张量的混合分量表示为

$$\sigma_j^i = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(2\varepsilon_j^i + \frac{2\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m^m\delta_j^i\right) \tag{6.4-3}$$

对上式进行缩并,得

$$\sigma_i^i = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_m^m \tag{6.4-4}$$

将上式代入(6.4-3)式,得

$$E\varepsilon_j^i = (1+\nu)\sigma_j^i - \nu\sigma_m^m\delta_j^i \tag{6.4-5}$$

(6.4-3)、(6.4-5)式是以弹性常数 E、ν 表示的广义胡克定律,前者以应变表示应力;后者以应力表示应变.它们是以普遍张量表示的,在各种曲线坐标系中都成立.

在直角坐标系中,张量的逆变分量与协变分量的差别消失,因此广义胡克定律(6.2－20)、(6.2－23)式和(6.4－3)、(6.4－5)式应用于直角坐标系时,σ_j^i、ε_j^i、δ_j^i 可分别写成 σ_{ij}、ε_{ij}、δ_{ij}. 这样,上述(6.2－20)、(6.2－23)、(6.4－3)和(6.4－5)各式在直角坐标系中用分量表示,则有如下的形式:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \lambda\varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon_{11}, \quad & \sigma_{12} &= 2\mu\varepsilon_{12} \\
\sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon_{22}, \quad & \sigma_{23} &= 2\mu\varepsilon_{23} \\
\sigma_{33} &= \lambda\varepsilon_{mm} + 2\mu\varepsilon_{33}, \quad & \sigma_{31} &= 2\mu\varepsilon_{31}
\end{aligned} \tag{6.4-6}$$

式中

$$\varepsilon_{mm} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \tag{6.4-7}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{mm}, \quad & \varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{mm}, \quad & \varepsilon_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2\mu} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{mm}, \quad & \varepsilon_{31} &= \frac{\sigma_{31}}{2\mu}
\end{aligned}\right\} \tag{6.4-8}$$

式中

$$\sigma_{mm} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \tag{6.4-9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{mm}\right), \quad & \sigma_{12} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12} \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{mm}\right), \quad & \sigma_{23} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{23} \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{mm}\right), \quad & \sigma_{31} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{31}
\end{aligned}\right\} \tag{6.4-10}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{mm}], \quad & \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{mm}], \quad & \varepsilon_{23} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{23} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{33} - \nu\sigma_{mm}], \quad & \varepsilon_{31} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{31}
\end{aligned}\right\} \tag{6.4-11}$$

在正交曲线坐标系中,如采用应力张量和应变张量的物理分量,则广义胡克定律的形式仍为(6.2－20)、(6.2－23)式,或(6.4－3)、(6.4－5)式.

§6.5　偏应力张量与偏应变张量的关系

在§4.6和§5.5中分别定义了偏应力张量 s_j^i[(4.6－1)、(4.6－2)式]及偏应变张量 e_j^i[(5.5－6)、(5.5－7)式]：

$$s_j^i = \sigma_j^i - \delta_j^i p$$

$$p = \frac{1}{3}\sigma_i^i$$

$$e_j^i = \varepsilon_j^i - \delta_j^i q$$

$$q = \frac{1}{3}\varepsilon_i^i$$

由(6.3－10)式可写出

$$p = \frac{E}{1-2\nu}q \tag{6.5-1}$$

由(6.4－5)式可得

$$\begin{aligned} E(e_j^i + \delta_j^i q) &= (1+\nu)(s_j^i + \delta_j^i p) - 3\nu p\delta_j^i \\ &= (1+\nu)s_j^i + (1-2\nu)p\delta_j^i \end{aligned} \tag{6.5-2}$$

将(6.5－1)式代入(6.5－2)式，可得

$$Ee_j^i = (1+\nu)s_j^i \tag{6.5-3}$$

或

$$s_j^i = \frac{E}{1+\nu}e_j^i = 2\mu e_j^i \tag{6.5-4}$$

这便是偏应力张量 s_j^i 与偏应变张量 e_j^i 之间的关系.

习　题

1. 一钢质构件内某点 P 的应力张量为

$$(\sigma^{ij}) = \begin{pmatrix} 100 & 75 & 80 \\ 75 & 56 & 150 \\ 80 & 150 & 120 \end{pmatrix} \times 10^6\ \text{Pa}$$

计算 P 点的应变张量. $E = 20\times 10^{10}$ Pa, $\nu = 0.3$.

2. 一固体内的位移场为

$$u^1 = cx^1,\quad u^2 = -c\nu x^2,\quad u^3 = -c\nu x^3$$

式中 ν 为泊松比，c 为常数. 计算以 ν、E 表示的应变场和应力场以及体力场.

3. 求证：在直角坐标系中，各向同性弹性体的广义胡克定律可写成以下形式：

$$E\epsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$E\epsilon_{yy} = \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})$$

$$E\epsilon_{zz} = \sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$2G\epsilon_{xy} = \sigma_{xy}$$

$$2G\epsilon_{yz} = \sigma_{yz}$$

$$2G\epsilon_{zx} = \sigma_{zx}$$

4．求证：应变张量的主方向与该点应力张量的主方向一致．

第七章　弹性力学的基本方程

§7.1　方程的汇集

本书第四～六章讨论了应力分析、应变分析、应力－应变关系.现将这三方面的方程综合列出.

静力方程(平衡方程)

$$\sigma^{ij}|_j + F^i = 0 \quad (物体内部) \tag{7.1-1}$$

$$P^i = \sigma^{ij} n_j \quad (物体表面) \tag{7.1-2}$$

几何方程

应变张量与位移矢量的关系:

$$E_{KL} = \frac{1}{2}(U_K|_L + U_L|_K + U_M|_K U^M|_L) \tag{7.1-3}$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_k|_l + u_l|_k - u_m|_k u^m|_l) \tag{7.1-4}$$

相容方程:

$$\begin{aligned} & e_{kn,lm} + e_{lm,kn} - e_{km,ln} - e_{ln,km} + \\ & 2g^{rs}\{\Gamma^{(e)}_{knr}\Gamma^{(g)}_{lms} + \Gamma^{(g)}_{knr}\Gamma^{(e)}_{lms} - 2\Gamma^{(e)}_{knr}\Gamma^{(e)}_{lms} - \\ & \Gamma^{(e)}_{kmr}\Gamma^{(g)}_{lns} - \Gamma^{(g)}_{kmr}\Gamma^{(e)}_{lns} + 2\Gamma^{(e)}_{kmr}\Gamma^{(e)}_{lns}\} + \\ & 2e^{rs}\{\Gamma^{(g)}_{knr}\Gamma^{(g)}_{lms} - \Gamma^{(g)}_{kmr}\Gamma^{(g)}_{lns} - 2\Gamma^{(e)}_{knr}\Gamma^{(g)}_{lms} - \\ & 2\Gamma^{(g)}_{knr}\Gamma^{(e)}_{lms} + 4\Gamma^{(e)}_{knr}\Gamma^{(e)}_{lms} + 2\Gamma^{(e)}_{kmr}\Gamma^{(g)}_{lns} + \\ & 2\Gamma^{(g)}_{kmr}\Gamma^{(e)}_{lns} - 4\Gamma^{(e)}_{kmr}\Gamma^{(e)}_{lns}\} = 0 \end{aligned} \tag{7.1-5}$$

物理方程

$$\sigma^{ij} = E^{ijlm}\varepsilon_{lm} \tag{7.1-6}$$

线性弹性力学讨论的范围是均匀、各向同性、线性弹性体的小变形问题.对于这类问题,静力方程如(7.1－1)、(7.1－2)式所示,几何方程和物理方程可以简化:

几何方程(小变形)

应变张量与位移矢量的关系:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i) \tag{7.1-7}$$

相容方程

$$\varepsilon_{kn}|_{lm} + \varepsilon_{lm}|_{kn} - \varepsilon_{km}|_{ln} - \varepsilon_{ln}|_{km} = 0 \tag{7.1-8}$$

物理方程(各向同性)

$$\sigma^i_j = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^i_j + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon^m_m \delta^i_j\right) \tag{7.1-9}$$

$$E\varepsilon^i_j = (1+\nu)\sigma^i_j - \nu\sigma^m_m \delta^i_j \tag{7.1-10}$$

方程(7.1－1)、(7.1－7)、(7.1－9)或(7.1－10)式有 15 个分量方程,含 15 个未知量,即应力张量 $\sigma^{ij}(=\sigma^{ji})$ 的 6 个分量,应变张量 $\varepsilon_{ij}(=\varepsilon_{ji})$ 的 6 个分量和位移矢量 u_i 的 3 个分量.因此,有足够数量的方程求解这些未知量,问题是可以解的.

§7.2 弹性力学平衡问题的提法

弹性力学平衡问题的提法是:已知物体在参考状态(未变形状态)的形状和尺寸,它所占的空间区域 B 和表面 $S(=S_1+S_2)$,组成物体的材料,给定 B 内的体力场 F^i 和 S_1 上的表面力矢量 P^i、S_2 上的位移矢量 $\bar{u}_i$,求位移场 u_i、应力张量场 σ^{ij}、应变张量场 ε_{ij},使满足偏微分方程(7.1－1)、(7.1－7)、(7.1－9)式或(7.1－10)式,同时还必须在 S_1 上满足静力边界条件[(7.1－2)式],在 S_2 上满足位移边界条件:

$$u_i = \bar{u}_i \tag{7.2-1}$$

从数学观点看,这是偏微分方程的边值问题.

在求解弹性力学问题时,并不需要同时求出 15 个未知量(函数),可以将某些未知量作为基本未知量先行求出,然后,通过它们求出其余的未知量.选择基本未知量通常有两种方法,一种方法是取位移场 u_i 作为基本未知量,求出这 3 个未知量,使满足平衡方程(7.1－1)式和边界条件(7.1－2)式和(7.2－1)式.这时方程(7.1－1)式和(7.1－2)式必须以位移矢量 u_i 表示.另一种方法是取应力场 σ^{ij} 作为基本未知量,要求出这 6 个未知量,使满足平衡方程(7.1－1)式、相容方程(7.1－8)式和边界条件(7.1－2)式.这时,方程(7.1－8)式必须以应力张量 σ^{ij} 表示.

§7.3 以位移矢量 u_i 表示的平衡方程

一、平衡方程——物体内部

利用(7.1－9)式,用 g^{jk} 点乘该式,使指标 j 上升,得

$$\sigma^{ij} = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon^{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon^{m}_{m}g^{ij}\right) \qquad (7.3-1)$$

把上式代入(7.1－1)式,可得

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)\varepsilon^{ij}|_j + \nu\varepsilon^{m}_{m}|_j g^{ij}\right] + F^i = 0$$

(7.3－2)

为了把上式与几何方程(7.1－7)式结合起来,必须在(7.1－7)式中把一个或两个指标提升:

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(u^i|^j + u^j|^i) \qquad (7.3-3a)$$

或

$$\varepsilon^{i}_{j} = \frac{1}{2}(u^i|_j + u_j|^i) \qquad (7.3-3b)$$

由此

$$\varepsilon^{m}_{m} = \frac{1}{2}(u^m|_m + u_m|^m) = u^m|_m \qquad (7.3-3c)$$

把上式代入(7.3－2)式的第一项,便得到

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\frac{1-2\nu}{2}(u^i|^j_j + u^j|^i_j) + \nu u^m|_{mj}g^{ij}\right]$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)(u^i|^j_j + u^j|^i_j)\right]$$

这样,就得到以下的基本方程:

$$\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)(u^i|^j_j + u^j|^i_j)\right] + F^i = 0$$

(7.3－4)

这便是以位移矢量 u_i 表示的平衡方程(物体内部).这是张量方程,在容许变换的各种曲线坐标系中都成立.

二、平衡方程——物体表面

将(7.3－3a)式代入(7.3－1)式,可得

$$\sigma^{ij}=\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}(u^i|^j+u^j|^i)+\frac{\nu}{1-2\nu}u^m|_m g^{ij}\right]$$

$$=\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)(u^i|^j+u^j|^i)+2\nu u^m|_m g^{ij}\right]$$

这样,边界条件(7.1-2)式可表示为

$$P^i=\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)(u^i|^j+u^j|^i)+2\nu u^m|_m g^{ij}\right]n_j \tag{7.3-5}$$

或写成

$$P^i=\frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-2\nu)(u^i|_j+u_j|^i)+2\nu u^m|_m \delta_j^i\right]n^j \tag{7.3-6}$$

三、直角坐标系中以位移表示的平衡方程

(一) 物体内部 方程(7.3-4)式取如下的形式:

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left(u_{i,jj}+\frac{1}{1-2\nu}u_{j,ji}\right)+F_i=0 \tag{7.3-7}$$

若以 x,y,z 表示直角坐标,以 u,v,w 和 F_x,F_y,F_z 分别表示 x,y,z 方向的位移分量和体力分量,则上式可展开为

$$\begin{aligned}
&\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\nabla^2 u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x}\right]+F_x=0\\
&\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\nabla^2 v+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial y}\right]+F_y=0\\
&\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\nabla^2 w+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial z}\right]+F_z=0
\end{aligned} \tag{7.3-8}$$

式中

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=u_{j,j} \tag{7.3-9}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7.3-10}$$

(二) 物体表面 方程(7.3-6)式取如下的形式:

$$P_i=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[(u_{i,j}+u_{j,i})n_j+\frac{2\nu}{1-2\nu}u_{m,m}n_i\right] \tag{7.3-11}$$

若以 P_x,P_y,P_z 表示 x,y,z 方向的表面力分量,则上式可展开为

$$\left.\begin{aligned}
P_x &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}n_x + \frac{\partial v}{\partial x}n_y + \frac{\partial w}{\partial x}n_z\right) + \frac{2\nu}{1-2\nu}en_x\right] \\
P_y &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial v}{\partial n} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}n_x + \frac{\partial v}{\partial y}n_y + \frac{\partial w}{\partial y}n_z\right) + \frac{2\nu}{1-2\nu}en_y\right] \\
P_z &= \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial w}{\partial n} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}n_x + \frac{\partial v}{\partial z}n_y + \frac{\partial w}{\partial z}n_z\right) + \frac{2\nu}{1-2\nu}en_z\right]
\end{aligned}\right\} \tag{7.3-12}$$

式中

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x}n_x + \frac{\partial}{\partial y}n_y + \frac{\partial}{\partial z}n_z \tag{7.3-13}$$

四、圆柱坐标系、球坐标系中以位移表示的平衡方程

现将圆柱坐标系和球坐标系中以位移的物理分量表示的平衡方程列出如下.这些方程是由张量方程(7.3-4)式变换来的,读者可自行推导.

(一) 圆柱坐标系(图 1-4)

位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 在圆柱坐标系中以物理分量表示为

$$\boldsymbol{u} = u_r\boldsymbol{e}_r + u_\theta\boldsymbol{e}_\theta + u_z\boldsymbol{e}_z \tag{7.3-14}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z$ 为单位基矢量.

以位移的物理分量表示的平衡方程(无体力)为

$$\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0$$

$$\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{r\partial\theta}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0$$

$$\nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = 0 \tag{7.3-15}$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7.3-16}$$

(二) 球坐标系(图 1-5)

位移矢量 $\boldsymbol{u}$ 在球坐标系中以物理分量表示为

$$\boldsymbol{u} = u_r\boldsymbol{e}_r + u_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + u_\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{7.3-17}$$

式中 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\theta$ 为单位基矢量.

以位移的物理分量表示的平衡方程(无体力)为

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}u_r - \frac{2\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}u_\varphi + \\
&\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\cot\varphi\, u_\varphi + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) = 0 \\
&\nabla^2 u_\varphi - \frac{2\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_\varphi + \\
&\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{r\partial \varphi}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\cot\varphi\, u_\varphi + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) = 0 \\
&\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{2\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_\theta + \\
&\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\cot\varphi\, u_\varphi + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) = 0
\end{aligned}\right\}
\tag{7.3-18}
$$

式中

$$
\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}
\tag{7.3-19}
$$

§ 7.4 以应力张量 σ^{ij} 表示的相容方程

一、以应力张量 σ^{ij} 表示的相容方程

将(7.1-10)式的指标 i 下降,则有

$$
\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma^m_m g_{ij}
\tag{7.4-1}
$$

将上式代入相容方程(7.1-8)并更换哑指标,得

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{kn}|_{lm} + \sigma_{lm}|_{kn} - \sigma_{km}|_{ln} - \sigma_{ln}|_{km} \\
&= \frac{\nu}{1+\nu}\left[g_{kn}\sigma^j_j|_{lm} + g_{lm}\sigma^j_j|_{kn} - g_{km}\sigma^j_j|_{ln} - g_{ln}\sigma^j_j|_{km}\right]
\end{aligned}
\tag{7.4-2}
$$

相容方程有 81 个分量方程,但只有 6 个是线性无关的,可以通过缩并,将(7.4-2)式的分量方程数减少.提升(7.4-2)式中的指标 l 可得

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{kn}|^l_m + \sigma^l_m|_{kn} - \sigma_{km}|^l_n - \sigma^l_n|_{km} \\
&= \frac{\nu}{1+\nu}\left[g_{kn}\sigma^j_j|^l_m + g^l_m\sigma^j_j|_{kn} - g_{km}\sigma^j_j|^l_n - g^l_n\sigma^j_j|_{km}\right]
\end{aligned}
\tag{7.4-3}
$$

令指标 $l=m$ 并求和(缩并),得

$$\sigma_{kn}|^m_m+\sigma^m_m|_{kn}-\sigma_{km}|^m_n-\sigma^m_n|_{km}$$

$$=\frac{\nu}{1+\nu}\left[g_{kn}\sigma^j_j|^m_m+g^m_m\sigma^j_j|_{kn}-g_{km}\sigma^j_j|^m_n-g^m_n\sigma^j_j|_{km}\right]\quad(7.4-4)$$

上式有 9 个分量方程,但它对指标 k 和 n 是对称的,因此只有 6 个方程是线性无关的.

上式还可进一步简化.将(7.1－1)式的指标 i 下降,可得

$$\sigma^j_i|_j=-F_i\quad(7.4-5)$$

或

$$\sigma_{ji}|^j=-F_i\quad(7.4-6)$$

对(7.4－5)、(7.4－6)式求协变导数,得

$$\sigma^k_j|_{ki}=-F_j|_i\quad(7.4-7)$$

$$\sigma_{ki}|^k_j=-F_i|_j\quad(7.4-8)$$

利用上两式,则(7.4－4)式可简化为

$$\sigma_{kn}|^m_m+\frac{1}{1+\nu}\sigma^m_m|_{kn}-\frac{\nu}{1+\nu}g_{kn}\sigma^j_j|^m_m=-(F_k|_n+F_n|_k)\quad(7.4-9)$$

将上式的指标 k 提升,便可写成普遍张量的形式:

$$\sigma^k_n|^m_m+\frac{1}{1+\nu}\sigma^m_m|^k_n-\frac{\nu}{1+\nu}g^k_n\sigma^j_j|^m_m=-(F^k|_n+F_n|^k)\quad(7.4-10)$$

将上式缩并,令 $n=k$ 并求和可得以下关系:

$$\sigma^k_k|^m_m=-\frac{1+\nu}{1-\nu}F^j|_j\quad(7.4-11)$$

将(7.4－11)式代入(7.4－10)式,则后者可写成

$$\sigma^k_n|^m_m+\frac{1}{1+\nu}\sigma^m_m|^k_n=-\frac{\nu}{1-\nu}\delta^k_nF^j|_j-(F^k|_n+F_n|^k)\quad(7.4-12)$$

这是以应力张量表示的相容方程,它在容许变换的各种曲线坐标系中成立.

二、直角坐标系中以应力分量表示的相容方程

在直角坐标系中,(7.4－12)式取如下形式:

$$\nabla^2\sigma_{kn} + \frac{1}{1+\nu}\theta_{,kn} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{kn}F_{j,j} - (F_{k,n} + F_{n,k}) \tag{7.4-13}$$

如以 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$ 表示应力分量,其余的符号与§7.3中相同,则上式可展开如下:

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial F_x}{\partial x}\\
&\nabla^2\sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial F_y}{\partial y}\\
&\nabla^2\sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial F_z}{\partial z}\\
&\nabla^2\sigma_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y}\right)\\
&\nabla^2\sigma_{zx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial x} = -\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\\
&\nabla^2\sigma_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{7.4-14}$$

式中

$$\Theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \tag{7.4-15}$$

三、圆柱坐标系、球坐标系中以应力分量表示的相容方程

下面不作推导,将圆柱坐标系和球坐标系中,用应力张量的物理分量表示的相容方程列出,设无体力 F. 这些方程是由张量方程(7.4-12)式变换得来的,读者可自行推导.

(一) 圆柱坐标系 (r, θ, z)(图 1-4)

应力张量的物理分量为 $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{zr}$. 以应力表示的相容方程为(无体力)

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_{rr} + \frac{2(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})}{r^2} - \frac{4}{r^2}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} = 0\\
&\nabla^2\sigma_{\theta\theta} - \frac{2(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})}{r^2} + \frac{4}{r^2}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\partial^2\Theta}{r^2\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right) = 0\\
&\nabla^2\sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} = 0
\end{aligned} \tag{7.4-16}$$

$$\nabla^2\sigma_{r\theta}-\frac{4\sigma_{r\theta}}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr})+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=0$$

$$\nabla^2\sigma_{\theta z}-\frac{\sigma_{\theta z}}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial\theta}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{r\partial\theta\partial z}=0$$

$$\nabla^2\sigma_{zr}-\frac{\sigma_{rz}}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial r}=0$$

式中

$$\Theta=\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}+\sigma_{zz} \tag{7.4-17}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7.4-18}$$

(二) 球坐标系(r,φ,θ)(图 1-5)

应力张量的物理分量为 $\sigma_{rr},\sigma_{\varphi\varphi},\sigma_{\theta\theta},\sigma_{r\varphi},\sigma_{\varphi\theta},\sigma_{r\theta}$。以应力表示的相容方程(无体力)为

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_{rr}-2\frac{2\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\theta\theta}}{r^2}-\frac{4}{r^2}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{4}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}-\\
&\qquad\frac{4}{r^2}\cot\varphi\,\sigma_{r\varphi}+\frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2}=0\\
&\nabla^2\sigma_{\varphi\varphi}-2\frac{\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{rr}\sin^2\varphi-\sigma_{\theta\theta}\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\varphi}+\frac{4}{r^2}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{4\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\theta}+\\
&\qquad\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}-\frac{\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=0\\
&\nabla^2\sigma_{\theta\theta}-2\frac{\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{rr}\sin^2\varphi-\sigma_{\varphi\varphi}\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\varphi}+\frac{4}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\theta}+\\
&\qquad\frac{4\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\theta}+\frac{4\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}\sigma_{r\varphi}+\\
&\qquad\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)=0
\end{aligned} \tag{7.4-19}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\sigma_{r\varphi}-\frac{4}{r^2}\sigma_{r\varphi}-\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\sigma_{r\varphi}+\frac{2\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}(\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{\varphi\varphi})-\\
&\qquad\frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta}+\\
&\qquad\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}-\frac{\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=0
\end{aligned}$$

$$\nabla^2\sigma_{\varphi\theta}-2\frac{(1+\cos^2\varphi)\sigma_{\varphi\theta}+\sin\varphi\cos\varphi\sigma_{r\theta}}{r^2\sin^2\varphi}+$$

$$\frac{2\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\theta\theta})+\frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\theta}+$$

$$\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\varphi\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)=0$$

$$\nabla^2\sigma_{r\theta}-\frac{4}{r^2}\sigma_{r\theta}-\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\sigma_{r\theta}-\frac{4\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}\sigma_{\varphi\theta}+$$

$$\frac{2}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})+\frac{2\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial\sigma_{\varphi\theta}}{\partial\varphi}+$$

$$\frac{1}{1+\nu}\left(\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial^2\Theta}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}-\frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=0$$

式中

$$\Theta=\sigma_{rr}+\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{\theta\theta} \qquad (7.4-20)$$

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\cot\varphi}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \qquad (7.4-21)$$

§7.5 解的惟一性

由平衡方程(7.1－1)、几何方程(7.1－7)和物理方程(7.1－9)或(7.1－10)以及静力边界条件(7.1－2)和位移边界条件(7.2－1)描述的弹性力学边值问题(见§7.2)，有惟一解，今论证如下.

设一弹性体在体力 F^i 和表面力 P^i 作用下有两组不同的解：

$${}^{(1)}\sigma^{ij},\qquad {}^{(1)}\varepsilon_{ij}$$

$${}^{(2)}\sigma^{ij},\qquad {}^{(2)}\varepsilon_{ij}$$

应力场 ${}^{(1)}\sigma^{ij}$ 和 ${}^{(2)}\sigma^{ij}$ 都满足平衡方程(7.1－1)和静力边界条件(7.1－2)，以及以应力表示的相容方程(7.4－12)，前者是：

$${}^{(1)}\sigma^{ij}|_j+F^i=0 \qquad (a-1)$$

$${}^{(1)}\sigma^{ij}n_j-P^i=0 \qquad (a-2)$$

$${}^{(2)}\sigma^{ij}|_j+F^i=0 \qquad (b-1)$$

$${}^{(2)}\sigma^{ij}n_j-P^i=0 \qquad (b-2)$$

将(a－1)减(b－1)，(a－2)减(b－2)，则有

$$({}^{(1)}\sigma^{ij} - {}^{(2)}\sigma^{ij})|_j = 0 \qquad (c-1)$$

$$({}^{(1)}\sigma^{ij} - {}^{(2)}\sigma^{ij})n_j = 0 \qquad (c-2)$$

令

$$\overset{*}{\sigma}{}^{ij} = {}^{(1)}\sigma^{ij} - {}^{(2)}\sigma^{ij}$$

则由(c－1)式和(c－2)式：

$$\overset{*}{\sigma}{}^{ij}|_j = 0 \qquad (d-1)$$

$$\overset{*}{\sigma}{}^{ij}n_j = 0 \qquad (d-2)$$

即 $\overset{*}{\sigma}{}^{ij}$ 是物体在无体力也无表面力作用时的应力场.这与经典弹性理论的"无初应力假设"是不符的(见第二篇引言),在无外力作用时,物体内没有应力.因此,在这种情况下,在物体内,

$$\overset{*}{\sigma}{}^{ij} = {}^{(1)}\sigma^{ij} - {}^{(2)}\sigma^{ij} = 0$$

即

$${}^{(1)}\sigma^{ij} = {}^{(2)}\sigma^{ij}$$

基于无初应力假设,在不受外力作用时,物体内没有应力,也没有应变.因此,在物体内与 $\overset{*}{\sigma}{}^{ij}$ 相应的应变场 $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ 也应当等于零.即

$$\overset{*}{\varepsilon}_{ij} = {}^{(1)}\varepsilon_{ij} - {}^{(2)}\varepsilon_{ij} = 0$$

即

$${}^{(1)}\varepsilon_{ij} = {}^{(2)}\varepsilon_{ij}$$

由此证明弹性力学问题的应力场和应变场解的惟一性.

现进一步论证位移场解的惟一性问题,仍用反证法.与上述 ${}^{(1)}\sigma^{ij}$、${}^{(1)}\varepsilon_{ij}$ 及 ${}^{(2)}\sigma^{ij}$、${}^{(2)}\varepsilon_{ij}$ 分别对应,有两种位移场解 ${}^{(1)}u_i$ 和 ${}^{(2)}u_i$,它们可通过对几何方程(5.3－2)积分,分别从 ${}^{(1)}\varepsilon_{ij}$ 和 ${}^{(2)}\varepsilon_{ij}$ 得出.在 ${}^{(1)}\varepsilon_{ij}$ 和 ${}^{(2)}\varepsilon_{ij}$ 相等的情况下,${}^{(1)}u_i$ 和 ${}^{(2)}u_i$ 之间可能差一个物体整体的刚体位移.若弹性力学问题给定的位移边界条件有必要的几何约束限制物体作刚体运动,则 ${}^{(1)}u_i = {}^{(2)}u_i$,即弹性力学问题的位移场解也是惟一的.

§7.6 圣维南原理

弹性力学问题的解必须满足弹性力学基本方程(7.1－1)、(7.1－7)和(7.1－9)或(7.1－10)以及静力边界条件(7.1－2)和位移边界条件(7.2－1).要满足静力边界条件(7.1－2),必须给定表面力 P^i 在 S_1 上的具体分布.但是对于很多工程中的实际问题,人们并不掌握表面力在其作用面 S_1 上的确切分布,这就不能求出问题的解,这给弹性力学问题的求解带来困

难.但是,事实表明,若作用在物体表面一小范围的力被另一静力等效力系(合力相等、合力矩相等)所代替,则由此引起的物体内应力场的改变,只在表面力作用的小范围附近,在距离该表面力作用范围较远处,不会引起应力的不可忽略的改变.这便是著名的圣维南原理,是1855年圣维南根据事实总结出来的.这样,圣维南原理可以表述如下:作用在物体表面一小范围内的表面力被另一静力等效力系(合力相等、合力矩相等)所代替,不会使在远离该范围的物体内各点的应力和位移产生不可忽略的改变.也就是说,由此引起的物体内应力场的改变,只在力作用的小范围附近的局部区域.因此圣维南原理也称为力的作用的局部性原理.

根据圣维南原理,在求解弹性力学问题时,如果不知道作用在物体表面一小范围内的表面力的确切分布,可以用作用在同一范围内的另一静力等效力系代替,如此求出的解,除了该表面力作用范围附近的局部区域外,在物体其余部分(也就是物体的绝大部分范围内)是精确的,因此可以认为这是该问题的精确解.

§7.7 叠加原理

弹性力学问题的解必须满足弹性力学基本方程和边界条件.如以应力场 σ^{ij} 作为基本未知量,则应满足平衡方程(7.1－1)、相容方程(7.4－12)和应力边界条件(7.1－2).设一弹性体在表面力 ${}^{(1)}P^i$ 和体力 ${}^{(1)}F^i$ 作用下,应力场为 ${}^{(1)}\sigma^{ij}$,它满足平衡方程和边界条件:

$$\left.\begin{aligned} {}^{(1)}\sigma^{ij}|_j + {}^{(1)}F^i &= 0 \\ {}^{(1)}P^i &= {}^{(1)}\sigma^{ij}n_j \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

同一弹性体,在表面力 ${}^{(2)}P^i$ 和体力 ${}^{(2)}F^i$ 作用下,应力场为 ${}^{(2)}\sigma^{ij}$,它满足平衡方程和边界条件:

$$\left.\begin{aligned} {}^{(2)}\sigma^{ij}|_j + {}^{(2)}F^i &= 0 \\ {}^{(2)}P^i &= {}^{(2)}\sigma^{ij}n_j \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

弹性力学的基本方程和边界条件都是线性的,将(a)式与(b)式相加,得

$$\left.\begin{aligned} ({}^{(1)}\sigma^{ij} + {}^{(2)}\sigma^{ij})|_j + ({}^{(1)}F^i + {}^{(2)}F^i) &= 0 \\ {}^{(1)}P^i + {}^{(2)}P^i &= ({}^{(1)}\sigma^{ij} + {}^{(2)}\sigma^{ij})n_j \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

则应力场 $({}^{(1)}\sigma^{ij} + {}^{(2)}\sigma^{ij})$ 是该弹性体在表面力 ${}^{(1)}P^i$ 和 ${}^{(2)}P^i$,及体力 ${}^{(1)}F^i$ 和 ${}^{(2)}F^i$ 作用下的应力场.

同样可得到 $({}^{(1)}\sigma^{ij} + {}^{(2)}\sigma^{ij})$ 满足的相容方程是 ${}^{(1)}\sigma^{ij}$ 与 ${}^{(2)}\sigma^{ij}$ 各自满足

的相容方程相加.

由(c)式和上述相容方程表明,($^{(1)}\sigma^{ij}+{}^{(2)}\sigma^{ij}$)满足在表面力($^{(1)}P^{i}+{}^{(2)}P^{i}$)和体力($^{(1)}F^{i}+{}^{(2)}F^{i}$)作用下求解弹性体的应力场的全部方程和边界条件.这便是叠加原理.

上述平衡方程和边界条件,都是基于小变形假设,即物体内各点的位置在变形前后的差别可以忽略.但是在有些情况下,变形引起物体内各点位置的改变,影响到外力的作用,例如在横向载荷和轴向压力同时作用下的梁,在这种情况下,叠加原理不能应用.

习　题

1. 由张量方程(7.3-4)出发,推导平面极坐标系中以位移的物理分量表示的平衡方程,无体力.

2. 题意同上题,但是圆柱坐标系.

3. 题意同题1,但是球坐标系.

4. 由张量方程(7.4-12)出发,推导在平面极坐标系中以应力张量的物理分量表示的相容方程.

5. 题意同上,但是圆柱坐标系.

6. 题意同题4,但是球坐标系.

第三篇
弹性力学问题及解题方法

第八章　若干线弹性问题的精确解

§8.1　内、外压力作用下的球壳
——球对称问题

球壳内、外半径分别为 a、b（$a \leqslant r \leqslant b$）. 在球壳内、外表面（$r = a$、$b$）上有均匀分布的法向表面力 p_a、p_b，表面力以拉力为正（图 8－1）. 略去体力的作用，取球坐标系（r, φ, θ）. 由于问题的球对称性质，u_i，σ^{ij}，ε_{ij} 都只是坐标 r 的函数，与 φ，θ 无关. 即

$$u_r = u_r(r), \quad u_\varphi = u_\theta = 0$$

由（5.7－5）式得

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \\ &\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi\theta} = \varepsilon_{\theta r} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.1－1}$$

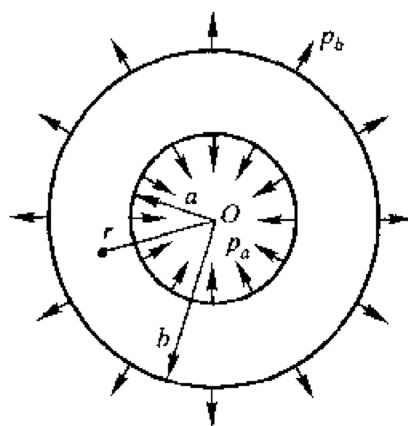


图　8－1

由于球对称性，所有的剪应力分量消失，即 $\sigma^{r\varphi} = \sigma^{\varphi\theta} = \sigma^{\theta r} = 0$. 由（4.8－10）式可知，静力平衡方程成为一个以 r 为自变量的常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \tag{8.1－2}$$

由广义胡克定律(6.2-20)式,应力张量和应变张量的物理分量之间的关系为:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr}&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{rr}+\lambda(\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{\theta\theta})\\\sigma_{\varphi\varphi}&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi}+\lambda(\varepsilon_{\theta\theta}+\varepsilon_{rr})\\\sigma_{\theta\theta}&=(\lambda+2\mu)\varepsilon_{\theta\theta}+\lambda(\varepsilon_{rr}+\varepsilon_{\varphi\varphi})\end{aligned}\right\}\tag{8.1-3}$$

利用(8.1-3)和(8.1-1)式,平衡方程(8.1-2)式可以转换成用位移分量 u_r 表示.

$$\frac{\mathrm{d}^2u_r}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r}-\frac{2}{r^2}u_r=0\tag{8.1-4}$$

(8.1-4)式便是在内外压力作用下球壳平衡问题的基本微分方程.它的通解是

$$u_r=c_1r+c_2r^{-2}\tag{8.1-5}$$

式中 c_1、c_2 为积分常数.本题的边界条件是:

$$\sigma_{rr}(a)=p_a,\sigma_{rr}(b)=p_b\tag{8.1-6}$$

将(8.1-5)式代入(8.1-1)式,然后代入(8.1-3)式,利用边界条件(8.1-6),得到以下2个方程:

$$\left.\begin{aligned}p_a&=(3\lambda+2\mu)c_1-4\mu c_2a^{-3}\\p_b&=(3\lambda+2\mu)c_1-4\mu c_2b^{-3}\end{aligned}\right\}$$

由此两方程,得到 c_1,c_2:

$$\left.\begin{aligned}(3\lambda+2\mu)c_1&=\frac{p_aa^3-p_bb^3}{a^3-b^3}\\4\mu c_2&=\frac{(p_a-p_b)a^3b^3}{a^3-b^3}\end{aligned}\right\}\tag{8.1-7}$$

将(8.1-7)式代入(8.1-5)式,可求得位移场:

$$u_r=\frac{(p_aa^3-p_bb^3)r}{(3\lambda+2\mu)(a^3-b^3)}+\frac{(p_a-p_b)a^3b^3}{4\mu(a^3-b^3)r^2}\tag{8.1-8}$$

将(8.1-8)式代入(8.1-1)式,然后应用(8.1-3)式,可求得应力场:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr}&=\frac{p_aa^3-p_bb^3}{a^3-b^3}-\frac{(p_a-p_b)a^3b^3}{(a^3-b^3)r^3}\\\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{\theta\theta}&=\frac{p_aa^3-p_bb^3}{a^3-b^3}+\frac{(p_a-p_b)a^3b^3}{2(a^3-b^3)r^3}\end{aligned}\right\}\tag{8.1-9}$$

若 $p_a=-p(p>0),p_b=0,\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$,则由(8.1-9)式可得:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{7\sigma_{rr}}{p}=1-\left(\frac{b}{r}\right)^3\\&\frac{7\sigma_{\varphi\varphi}}{p}=\frac{7\sigma_{\theta\theta}}{p}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^3\end{aligned}\right\}\qquad(8.1-10)$$

图 8-2 表示 $\sigma_{\varphi\varphi}$、$\sigma_{\theta\theta}$沿球壳半径方向的分布曲线.

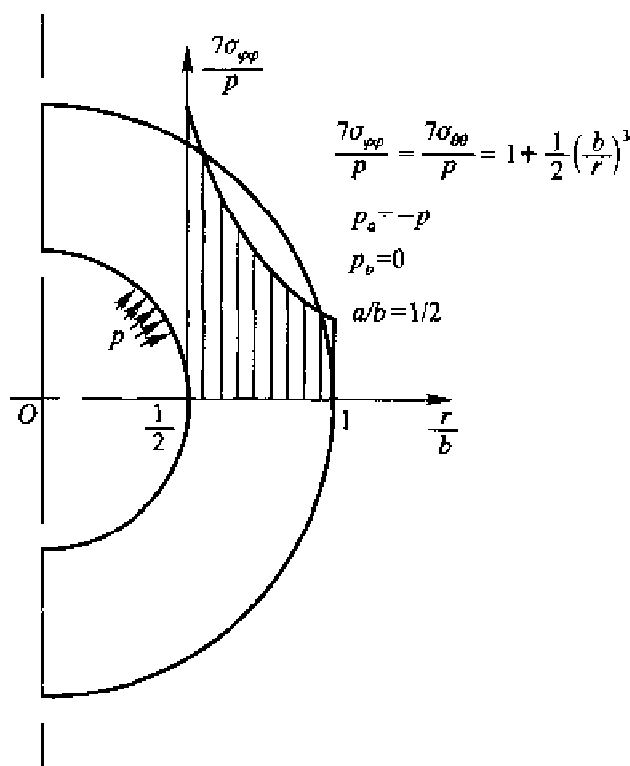


图 8-2

§8.2 内、外压力作用下的圆柱壳——轴对称问题

内、外半径分别为 a、b 的圆柱壳(图 8-3),在它们的内外表面分别有法向表面力 p_a、p_b 作用,以拉力为正值.采用圆柱坐标系(r,θ,z),z 轴与圆柱壳的中心轴重合.略去体力.由于圆柱壳及作用于其上的载荷的轴对称性,圆柱壳的应力、应变及位移场与坐标 θ 无关.假设与 z 轴垂直的任意两截面间的距离在变形后保持不变(平面应变假设——以后将要讨论),则圆柱壳内各点的切向位移和轴向位移分量消失,只有径向位移

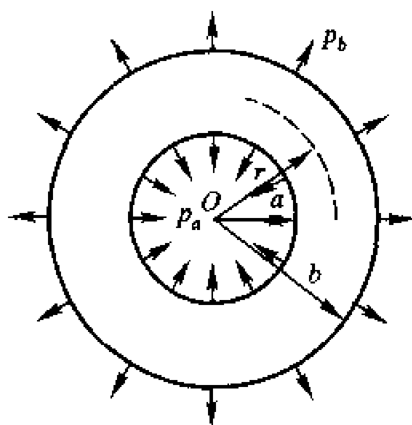


图 8-3

u_r,它是坐标 r 的函数,即

$$u_r = u_r(r), \quad u_\theta = u_z = 0 \tag{8.2-1}$$

将(8.2-1)式代入(5.7-2)式,可得:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = 0 \\ &\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zr} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.2-2}$$

由广义胡克定律(6.2-20),应力张量和应变张量的物理分量之间的关系为

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} \\ &\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{rr} \\ &\sigma_{zz} = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \\ &\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zr} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.2-3}$$

静力平衡方程(4.8-8)简化为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{rr}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \tag{8.2-4}$$

将(8.2-3)代入(8.2-4)并应用(8.2-2)式,可得出用位移分量 u_r 表示的平衡方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_r}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2}u_r = 0 \tag{8.2-5}$$

(8.2-5)式便是内、外压力作用下的圆柱壳平衡问题的基本微分方程,它的通解为

$$u_r = c_1 r + c_2 r^{-1} \tag{8.2-6}$$

由图 8-3 可知,边界条件为

$$\sigma_{rr}(b) = p_b, \quad \sigma_{rr}(a) = p_a \tag{8.2-7}$$

由(8.2-7)式及(8.2-3)式,并利用(8.2-2)及(8.2-6)式,可得下列方程:

$$\left.\begin{aligned} &2(\lambda + \mu)c_1 - 2\mu c_2 a^{-2} = p_a \\ &2(\lambda + \mu)c_1 - 2\mu c_2 b^{-2} = p_b \end{aligned}\right\} \tag{8.2-8}$$

解(8.2-8)式,得

$$\begin{aligned} &2(\lambda + \mu)c_1 = \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} \\ &2\mu c_2 = \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{b^2 - a^2} \end{aligned} \tag{8.2-9}$$

将(8.2－9)式代入(8.2－6)式,可得位移场:

$$u_r = \frac{(p_b b^2 - p_a a^2) r}{2(b^2 - a^2)(\lambda + \mu)} + \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{2(b^2 - a^2)\mu} \cdot \frac{1}{r} \quad (8.2-10)$$

应用(8.2－10)式和(8.2－2)式及(8.2－3)式,可得应力场:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2) r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2) r^2} \\ \sigma_{zz} &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} \end{aligned}\right\} \quad (8.2-11)$$

§8.3 等截面直杆的扭转

今讨论截面为任意形状的等截面直杆在两端扭矩 T 作用下的扭转问题,如图 8－4 所示.采用直角坐标系,z 轴与杆的轴线重合,母线与 z 轴平行.直杆的截面为 A,其周线为 c,A 为单连通域.直杆的侧表面上无外力作用.

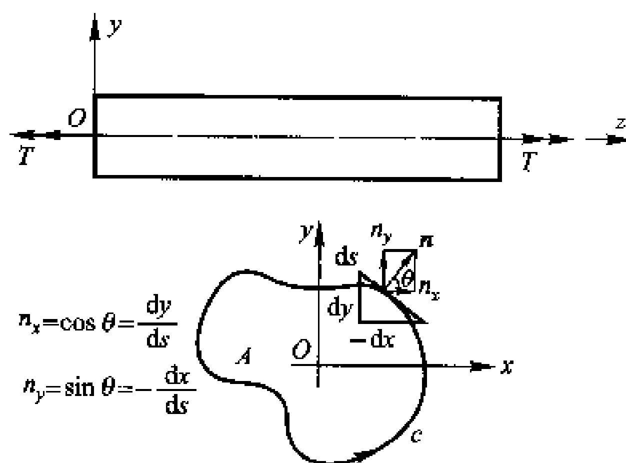


图 8 4

一、圣维南(1797—1886)半逆解法

圣维南解法以位移为基本未知量,又称位移解法.假设位移场为

$$u_x \equiv u = -\beta z y, \quad u_y \equiv v = \beta z x, \quad u_z \equiv w = \beta\phi(x, y) \quad (8.3-1)$$

式中 β 为一常数，$\phi(x,y)$ 称为圣维南翘曲函数，它们是待求的. 应用(5.3－3)式，得应变场为

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{xy}=0\\&2\varepsilon_{xz}=\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right),\quad 2\varepsilon_{yz}=\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)\end{aligned}\right\}\tag{8.3-2}$$

将(8.3－1)式代入(5.3－7)式，得转动张量的分量为

$$\omega_z=\beta z,\quad \omega_x=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}-x\right),\quad \omega_y=-\frac{1}{2}\beta\left(y+\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\tag{8.3-3}$$

由(8.3－3)中的第一个式子，可得 $\frac{\partial\omega_z}{\partial z}=\beta$，由此可知，$\beta$ 是直杆单位长度的扭转角. 将(8.3－2)式代入广义胡克定律(6.4－10)式，得到应力场：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma_{xy}=0\\&\sigma_{xz}=G\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right),\quad \sigma_{yz}=G\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)\end{aligned}\right\}\tag{8.3-4}$$

略去体力，静力平衡方程(4.2－6)式的第1、2两式恒能满足，第3式成为

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}=0\tag{8.3-5}$$

将(8.3－4)的后2式代入(8.3－5)式，得出方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0,\quad 在域 A 内\tag{8.3-6a}$$

或写成

$$\nabla^2\phi=0,\qquad 在域 A 内\tag{8.3-6b}$$

由此可知，翘曲函数 ϕ 满足拉普拉斯方程.

在杆的侧表面($n_z=0$)上没有外力作用，$P_x=P_y=P_z=0$. 基于(8.3－4)式，在杆的侧表面，平衡方程(4.2－7)式中的第1、2两式恒能满足，第3式成为

$$P_z=\sigma_{zx}n_x+\sigma_{zy}n_y=0,\quad 在 c 上\tag{8.3-7}$$

将(8.3－4)式代入(8.3－7)式，则边界条件如下式：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y=yn_x-xn_y=\boldsymbol{n}\cdot\nabla\phi=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n},在 c 上\tag{8.3-8}$$

式中 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}$ 为翘曲函数 $\phi(x,y)$ 对于边界 c 的外法矢 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

这样，求解等截面直杆的扭转问题归结为求翘曲函数 $\phi(x,y)$，它在域

A 内满足方程(8.3-6),并在周线 c 上满足边界条件(8.3-8)式.(8.3-8)式是非齐次边界条件,满足这样的边界条件是比较困难的.

二、普朗特(Prandtle,1875—1953)应力函数法

假设应力分量

$$\sigma_{x} = \sigma_{y} = \sigma_{z} = \sigma_{xy} = 0 \tag{8.3-9}$$

略去体力,则静力平衡方程(4.2-6)式成为

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{8.3-10}$$

普朗特引进应力函数 $\psi(x,y)$,使得

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8.3-11}$$

则平衡方程(8.3-10)恒能满足,$\psi(x,y)$称为普朗特应力函数.

进一步考虑相容方程.以应力分量表示的相容方程(7.4-14)式中的第1、2、3、6式恒能满足,第4、5式成为

$$\nabla^2 \sigma_{yz} = 0, \quad \nabla^2 \sigma_{zx} = 0$$

将(8.3-11)式代入上二式,可得

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0, \quad \nabla^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0$$

亦即

$$\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 \psi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 \psi) = 0$$

由此得出

$$\nabla^2 \psi(x,y) = K, \quad \text{在域 } A \text{ 内} \tag{8.3-12}$$

式中 K 是待定的常数.

现在考虑边界条件.在杆的侧表面上($n_z = 0$)没有外力,$P_x = P_y = P_z = 0$.由于(8.3-9)式,表面力的平衡方程(4.2-7)式中的第1、2式恒能满足,第3式成为

$$\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y = 0$$

将(8.3-11)式代入上式,并由于 $n_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, n_y = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$(图8.4),得

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} n_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{8.3-13}$$

上式表明,在杆的侧面上(横截面的边界曲线 c 上),应力函数 ψ 的值是

常量.由(8.3-11)式可知,应力函数 $\psi(x,y)$ 增加或减少一个常数,应力分量的值不受影响.因此,在单连通域情况下,应力函数 ψ 的值在边界曲线上可取为0,这样可以简化边界条件,即

$$\psi=0,\quad \text{在周界 } c \text{ 上} \tag{8.3-14}$$

下面计算作用在杆横截面 A(外法矢 $\boldsymbol{n}=n_z=1, n_x=n_y=0$)上应力的合力 R_x、R_y 和合力矩 T.由表面力平衡条件(4.2-7)式,可得

$$P_x=\sigma_{xz},\quad P_y=\sigma_{yz}$$

因此横截面上的合力为

$$\begin{aligned}
R_x &= \int_A P_x \mathrm{d}A=\int_A \sigma_{xz}\mathrm{d}A=\int_A \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathrm{d}A \\
&= \int_A\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]\mathrm{d}A \\
&= \oint_c\left[\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)n_x+\left(-x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)n_y\right]\mathrm{d}s \\
&= \oint_c\left[x\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}n_x-\frac{\partial\psi}{\partial x}n_y\right)\right]\mathrm{d}s=0
\end{aligned}$$

推导上式时,应用了格林定理,将对平面域 A 的积分转换成沿周界 c 的曲线积分,且由于(8.3-13)式,使得这个曲线积分等于0.同样,

$$\begin{aligned}
R_y &= \int_A P_y\mathrm{d}A=\int_A \sigma_{yz}\mathrm{d}A=\int_A\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\mathrm{d}A \\
&= \int_A\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}A \\
&= \oint_c\left[\left(-y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)n_y+\left(y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)n_x\right]\mathrm{d}S \\
&= \oint_c y\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}n_x-\frac{\partial\psi}{\partial x}n_y\right)\mathrm{d}S=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T &= \int_A (P_y x-P_x y)\mathrm{d}A=\int_A(\sigma_{yz}x-\sigma_{xz}y)\mathrm{d}A \\
&= \int_A\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}x-\frac{\partial\psi}{\partial y}y\right)\mathrm{d}A \\
&= \int_A\left[-\frac{\partial(x\psi)}{\partial x}-\frac{\partial(y\psi)}{\partial y}+2\psi\right]\mathrm{d}A \\
&= -\oint_c[(x\psi)n_x+(y\psi)n_y]\mathrm{d}S+\int_A 2\psi\mathrm{d}A
\end{aligned}$$

$$= -\oint_c \psi[xn_x + yn_y]\mathrm{d}S + \int_A 2\psi\mathrm{d}A$$

上式中的曲线积分等于0,这是由于(8.3-14)式表明,在周界 c 上 $\psi=0$. 这样

$$T = 2\int_A \psi\mathrm{d}A \tag{8.3-15}$$

对于直杆的扭转问题,T 是给定的,因此,由(8.3-15)式可以决定常数 K.

比较圣维南位移解法与普朗特应力函数解法,由(8.3-4)和(8.3-11)式可知:

$$G\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y\right) = \frac{\partial\psi}{\partial y},\quad G\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x\right) = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{8.3-16}$$

将(8.3-16)的第1式对 y 求偏导数,第2式对 x 求偏导数,然后相减,得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2G\beta \tag{8.3-17a}$$

即

$$\nabla^2\psi = -2G\beta \tag{8.3-17b}$$

可见应力函数 $\psi(x,y)$所应满足的基本微分方程(8.3-12)中的常数 K 是$(-2G\beta)$,即

$$K = -2G\beta \tag{8.3-18}$$

前已指出,上式中的 β 是直杆单位长度的扭转角. 和(8.3-12)式一样,(8.3-17)式可以作为普朗特应力函数应满足的基本微分方程,β 可由(8.3-15)式决定.

由以上的讨论可以看出:应用普朗特应力函数法求解等截面直杆的扭转问题,只需求出应力函数 $\psi(x,y)$使它满足基本微分方程(8.3-12)[或(8.3-17)]式及边界条件(8.3-14)式,并由端部边界条件(8.3-15)式求出 K(或 β). 然后由(8.3-11)式即可求出应力分量.

上述公式是在直角坐标系建立的. 可以将它们转换成以普遍张量表示,这样,在任意曲线坐标系中,这些方程都成立. 现将普遍张量表示的等截面直杆扭转问题的基本方程和边界条件列出如下.

应力函数 $\psi(x^1,x^2)$应满足基本微分方程和边界条件:

基本微分方程:

$$\psi|_{\alpha}^{\alpha} = -2G\beta,\quad \text{在域 } A \text{ 内} \tag{8.3-17'}$$

边界条件:

$$\psi=0,\qquad \text{在周界 } c \text{ 上} \tag{8.3-14'}$$

$$T=2\iint \psi \mathrm{d}r^{\alpha}\mathrm{d}s^{\beta}\in_{\alpha\beta},\qquad \text{在端部} \tag{8.3-15'}$$

应力分量：

$$\sigma^{\alpha 3}=\psi|_{\gamma}\in^{\alpha\gamma} \tag{8.3-11'}$$

上式中，指标 $\alpha,\beta,\gamma=1,2$，指标 3 表示 z 方向. $\mathrm{d}r^{\alpha}\mathrm{d}s^{\beta}\in_{\alpha\beta}=\mathrm{d}A$，见公式(1.11-11).

§8.4 等截面直杆扭转问题举例

本节以椭圆形截面直杆和矩形截面直杆为例，讨论采用普朗特应力函数法解直杆的扭转问题.

例 1 椭圆形截面直杆的扭转

直杆的横截面为椭圆形，半轴为 a,b（图 8-5）. 椭圆形边界曲线 c 的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{a}$$

由边界条件(8.3-14)式，可假设应力函数为

$$\psi=F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right) \tag{b}$$

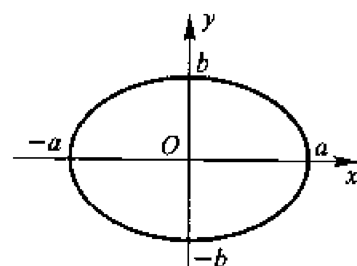


图 8-5

将(b)式代入微分方程(8.3-12)，可得

$$2F\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=K$$

$$F=\frac{Ka^2b^2}{2(a^2+b^2)}$$

这样，应力函数为

$$\psi=\frac{Ka^2b^2}{2(a^2+b^2)}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right] \tag{c}$$

常数 K 由方程(8.3-15)式确定.

$$T=2\int_A \psi \mathrm{d}A=\int_A \frac{Ka^2b^2}{(a^2+b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\mathrm{d}A$$

$$=\frac{K}{a^2+b^2}\int_A (b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)\mathrm{d}A$$

$$= \frac{K}{a^2+b^2}(b^2 I_y + a^2 I_x - a^2 b^2 A)$$

$$= \frac{K}{a^2+b^2}\left(b^2 \frac{1}{4}\pi a^3 b + a^2 \frac{1}{4}\pi a b^3 - \pi a^3 b^3\right)$$

$$= -\frac{K\pi a^3 b^3}{2(a^2+b^2)} \tag{d}$$

$$K = -\frac{2T(a^2+b^2)}{\pi a^3 b^3} \tag{e}$$

将 K 代回(c)式,可求得应力函数 ψ 为

$$\psi = -\frac{T}{\pi ab}\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right] \tag{f}$$

将应力函数 ψ(f 式)代入(8.3-11)式,可得应力分量为

$$\sigma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{T}{\pi ab}\cdot\frac{2y}{b^2} = -\frac{2Ty}{\pi ab^3}$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{T}{\pi ab}\frac{2x}{a^2} = \frac{2Tx}{\pi a^3 b} \tag{8.4-1}$$

需要说明的是在(d)式中,I_x, I_y, A 是椭圆形截面的几何性质:

$$\int_A x^2 \mathrm{d}A = I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

$$\int_A y^2 \mathrm{d}A = I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$$

$$\int_A \mathrm{d}A = A = \pi ab$$

例 2 矩形截面直杆的扭转

杆截面的边长分别为 $2a, 2b$(图 8-6). 等截面直杆扭转的基本微分方程为(8.3-17a)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2G\beta \tag{8.4-2a}$$

在本题中,边界条件(8.3-14)取下式:

$$\psi = 0, 在\ x = \pm a \tag{8.4-2b}$$

$$\psi = 0, 在\ y = \pm b \tag{8.4-2c}$$

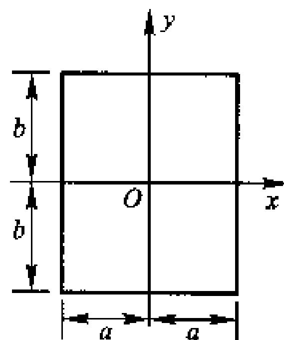


图 8-6

设方程(8.4-2)(泊松方程)的解取以下级数形式:

$$\psi=\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{2a}f_n(y) \tag{8.4-3}$$

上式满足边界条件：$\psi=0$，在边界 $x=\pm a$ 上。将(8.4-2a)方程右边的常数 $-2G\beta$ 展开成余弦级数：

$$-2G\beta=-2G\beta\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\pi x}{2a},\quad -a\leqslant x\leqslant a \tag{8.4-4}$$

将(8.4-3)、(8.4-4)代入基本微分方程(8.4-2a)，得到 $f_n(y)$ 的微分方程：

$$\frac{d^2f_n(y)}{dy^2}-\frac{n^2\pi^2}{4a^2}f_n(y)=-2G\beta\frac{4}{n\pi}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \tag{8.4-5}$$

这是一个常微分方程，它的解是

$$f_n(y)=A_n\sinh\frac{n\pi y}{2a}+B_n\cosh\frac{n\pi y}{2a}+\frac{32G\beta a^2}{n^3\pi^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \tag{8.4-6}$$

由(8.4-2c)式可知：边界条件 $\psi=0$（在 $y=\pm b$ 上）等价于

$$f_n(y)=0,\ y=\pm b \tag{8.4-2d}$$

将(8.4-6)式代入边界条件(8.4-2d)，可得

$$\left.\begin{aligned}&A_n=0\\&B_n=-\frac{1}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\frac{32G\beta a^2}{n^3\pi^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\end{aligned}\right\} \tag{8.4-7}$$

这样，应力函数(8.4-3)取以下形式：

$$\psi=\frac{32G\beta a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[1-\frac{\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right]\cos\frac{n\pi x}{2a} \tag{8.4-8}$$

由此可得应力场为

$$\sigma_{yz}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$=\frac{16G\beta a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[1-\frac{\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right]\sin\frac{n\pi x}{2a}$$

$$\sigma_{xz}=\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$=-\frac{16G\beta a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sinh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\cos\frac{n\pi x}{2a}$$

(8.4－9)

在长边中点 $x=a,y=0$ 处

$$\sigma_{xz}=0$$

$$\sigma_{yz}\Big|_{\substack{x=a\\y=0}}=\sigma_{\max}$$

$$=\frac{16G\beta a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[1-\frac{1}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right]\tag{8.4-10}$$

由于级数

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

因此

$$\sigma_{\max}=2G\beta a-\frac{16G\beta a}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2\cosh\frac{n\pi b}{2a}}$$

$$\equiv k2G\beta a\tag{8.4-11}$$

$$k=\left[1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right]$$

单位长度扭转角 β 可由(8.3－15)式求出

$$T=2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{64G\beta a^2}{\pi^3}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left\{\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[1-\frac{\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right]\cos\frac{n\pi x}{2a}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{32G\beta(2a)^3(2b)}{\pi^4}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^4}-$$

$$\frac{64G\beta(2a)^4}{\pi^5}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\tanh\frac{n\pi b}{2a}$$

由于级数 $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$,因此

$$T=\frac{1}{3}G\beta(2a)^3(2b)\left[1-\frac{192}{\pi^5}\frac{a}{b}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\tanh\frac{n\pi b}{2a}\right]$$

$$=k_1G\beta(2a)^3(2b) \tag{8.4-12}$$

式中

$$k_1=\frac{1}{3}\left[1-\frac{192}{\pi^5}\frac{a}{b}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^5}\tanh\frac{n\pi b}{2a}\right] \tag{8.4-13}$$

T 是作用在直杆端面的扭矩,它是给定的,由此可求出单位长度的扭转角 β. 由(8.4-11)及(8.4-12)可知

$$G\beta=\frac{\sigma_{max}}{k(2a)}=\frac{T}{k_1(2a)^3(2b)} \tag{8.4-14}$$

这样

$$\sigma_{max}=\frac{k}{k_1}\frac{T}{(2a)^2(2b)}=\frac{1}{k_2}\frac{T}{(2a)^2(2b)} \tag{8.4-15}$$

常数 k、k_1、k_2 见表 8-1. 由(8.4-12)及(8.4-11)式可以看出,对于狭长的矩形截面,$\frac{b}{a}\to\infty$,这时

$$\beta=\frac{3T}{G(2a)^3(2b)} \tag{8.4-16}$$

$$\sigma_{max}=\frac{3T}{(2a)^2(2b)} \tag{8.4-17}$$

表 8-1 矩形截面直杆扭转的常数

b/a	k	k_1	$k_2=k_1/k$
1.0	0.675	0.140 6	0.208
1.2	0.759	0.166	0.219
1.5	0.848	0.196	0.231
2.0	0.930	0.229	0.246
2.5	0.968	0.249	0.258
3.0	0.985	0.263	0.267
4.0	0.997	0.281	0.282
5.0	0.999	0.291	0.291
10.0	1.000	0.312	0.312
∞	1.000	0.333	0.333

§ 8.5 梁的纯弯曲

今讨论梁在端部力偶作用下的纯弯曲问题.取直角坐标系如图8-7.梁有等截面,截面对称于 x 轴,面积为 A.在参考状态,z 轴通过截面形心.

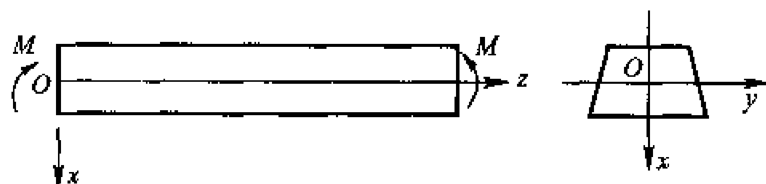


图 8-7

设应力场为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=\sigma_{yz}=\sigma_{zx}=0\\&\sigma_{zz}=\frac{M}{I}x,\ I=\int_A x^2\mathrm{d}A\end{aligned}\right\}\qquad(8.5-1)$$

将(8.5-1)式代入静力平衡方程(4.2-6),略去体力,则静力平衡方程恒能满足.将(8.5-1)式代入以应力分量表示的相容方程(7.4-14),则相容方程也是满足的.考察梁侧表面上的边界条件.由于是等截面直梁,在侧表面上,$n_z=0$.梁的侧表面上没有外力作用,$P_x=P_y=P_z=0$,因此边界条件(4.2-7)是满足的.进一步考察梁端(右端 $n_x=n_y=0$, $n_z=1$)的边界条件.由(4.2-7)式

$$P_x=0,\quad P_y=0,\quad P_z=\sigma_{zz}$$

梁端的表面力的合力为0,合力矩为弯矩 M,即

$$\int_A P_z\mathrm{d}A=\int_A\sigma_{zz}\mathrm{d}A=\frac{M}{I}\int_A x\mathrm{d}A=0$$

$$\int_A P_z x\mathrm{d}A=\int_A\sigma_{zz}x\mathrm{d}A=\frac{M}{I}\int_A x^2\mathrm{d}A=M$$

$$\int_A P_z y\mathrm{d}A=\int_A\sigma_{zz}y\mathrm{d}A=\frac{M}{I}\int_A xy\mathrm{d}A=0$$

因为 x、y 轴通过截面形心,所以 $\int_A x\mathrm{d}A=0$, $\int_A xy\mathrm{d}A=0$.由此可见,梁右端的边界条件是满足的.同样,梁左端的边界条件也满足.

由以上的分析,可见应力场(8.5-1)式满足弹性力学的基本方程和

边界条件,因此,它是梁的纯弯曲问题的正确解.

下面讨论梁的位移.将(8.5-1)式代入广义胡克定律(6.4-5)式,并应用(5.3-3′)式,得

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu M}{EI}x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu M}{EI}x = \frac{\partial v}{\partial y} \\
&\varepsilon_{zz} = \frac{M}{EI}x = \frac{\partial w}{\partial z} \\
&\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \ \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0 \\
&\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{8.5-2}
$$

将(8.5-2)的前三式分别积分,得

$$
\left.
\begin{aligned}
u &= -\frac{\nu M}{EI}\frac{x^2}{2} + f_1(y,z) \\
v &= -\frac{\nu M}{EI}xy + f_2(z,x) \\
w &= \frac{M}{EI}xz + f_3(x,y)
\end{aligned}
\right\}
\tag{a}
$$

式中 f_1、f_2、f_3 是任意函数.将上式代入(8.5-2)的后三式,得

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[-\frac{\nu M}{EI}y + \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\right] = 0 \tag{b}
$$

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_3}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\right] = 0 \tag{c}
$$

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{M}{EI}z + \frac{\partial f_3}{\partial x}\right] = 0 \tag{d}
$$

将(b)式对 x 偏微分,(c)式对 z 偏微分,得

$$
\frac{\partial^2 f_2(x,z)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2(x,z)}{\partial z^2} = 0
$$

由此得

$$
f_2(x,z) = a + bx + cz + dxz \tag{e}
$$

与此类似

$$
\frac{\partial^2 f_3(x,y)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_3(x,y)}{\partial x^2} = 0
$$

得

$$f_3(x,y)=e+gx+hy+ixy \tag{g}$$

$$\frac{\partial^2 f_1(y,z)}{\partial z^2}+\frac{M}{EI}=0,\frac{\partial^2 f_1(y,z)}{\partial y^2}-\frac{\nu M}{EI}=0$$

得

$$f_1(y,z)=-\frac{Mz^2}{EI\,2}+\frac{\nu My^2}{EI\,2}+j+ky+lz+myz \tag{h}$$

将(e)、(g)、(h)式分别代入(a)式中的 u、v、w 式,得

$$\left.\begin{aligned}
u&=-\frac{\nu Mx^2}{EI\,2}-\frac{Mz^2}{2EI}+\frac{\nu M}{EI}\cdot\frac{y^2}{2}+j+ky+lz+myz\\
v&=-\frac{\nu M}{EI}xy+a+bx+cz+dxz\\
w&=\frac{M}{EI}xz+e+gx+hy+ixy
\end{aligned}\right\} \tag{j}$$

将(j)式分别代入(8.5-2)式中的后3式,得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[-\frac{\nu M}{EI}y+b+dz+\frac{\nu My}{EI}+k+mz\right]=0,\\
&\qquad \text{即}(b+k)+(d+m)z=0\\
&\frac{1}{2}[h+ix+c+dx]=0,\\
&\qquad \text{即}(h+c)+(i+d)x=0\\
&\frac{1}{2}\left[-\frac{Mz}{EI}+l+my+\frac{Mz}{EI}+g+iy\right]=0,\\
&\qquad \text{即}(l+g)+(m+i)y=0
\end{aligned}\right\} \tag{k}$$

由(k)式可得

$$k=-b,\quad d=-m$$
$$h=-c,\quad i=-d$$
$$l=-g,\quad m=-i$$

由上面的右边3式,可得 $d=i=m=0$. 这样

$$\left.\begin{aligned}
u&=-\frac{\nu Mx^2}{EI\,2}-\frac{Mz^2}{EI\,2}+\frac{\nu My^2}{EI\,2}+j-by-gz\\
v&=-\frac{\nu M}{EI}xy+a+bx+cz\\
w&=\frac{M}{EI}xz+e+gx-cy
\end{aligned}\right\} \tag{l}$$

上式中的积分常数 a、b，c，e，g，j 由梁端的约束条件——位移边界条件决定．设梁左端固定，即在坐标原点(0,0,0)，$u=v=w=0$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial x}=0$，将(1)式中的 u，v，w 表示式分别代入上述边界条件，可得

$$a=e=j=0,\quad b=c=g=0$$

这样，位移场如下式：

$$\begin{aligned} u &= -\frac{M}{2EI}[z^2+\nu(x^2-y^2)] \\ v &= \frac{\nu M}{EI}xy \\ w &= \frac{M}{EI}xz \end{aligned} \tag{8.5-3}$$

读者可将这些结果与材料力学的结果加以比较．

§8.6 平面问题

弹性固体都是空间物体，所以一般来说，弹性力学问题都是三维空间问题，外力一般都是空间力系．从§7.1弹性力学基本方程的汇集可以看出，由于弹性力学基本方程的复杂性，求解弹性力学空间问题在数学上是很困难的．但是，在实际工程问题中，确有一类弹性力学问题，由于讨论对象的几何形状和作用在其上的外力的特殊性，可以把这类问题简化为平面问题，这样，在数学处理上可以简化．弹性力学平面问题在工程实际中有广泛的应用．下面分别讨论平面应变问题和平面应力问题．

一、平面应变问题

今考虑长柱形体，其长度方向的尺度远大于横截面的尺度，采用直角坐标系，柱形体母线平行于 z 轴，$l_z \gg l_x, l_y$，见图8-8．设物体两端固定，横截面无 z 方向的位移．物体的体力矢量 F_i 和作用在物体的表面力矢量 P_i 都与 z 坐标无关，且均无 z 方向的分量，即

$$F_x=F_x(x,y),\quad F_y=F_y(x,y),\quad F_z=0 \tag{8.6-1}$$

$$P_x=P_x(x,y),\quad P_y=P_y(x,y),\quad P_z=0 \tag{8.6-2}$$

在这种特殊的几何形状、支持和受力情况下，物体的位移矢量与 z 无关，且无 z 方向的分量，即

$$u_x=u(x,y),\quad u_y=v(x,y),\quad u_z=w=0$$

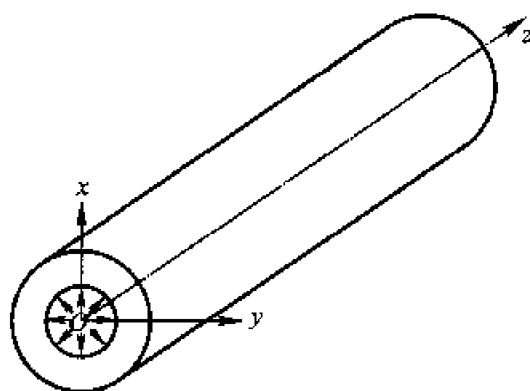


图 8-8

应用(5.3-3′)式,得应变分量为

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{zz}=0\\&\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0\end{aligned}\right\}\qquad(8.6-3)$$

由此可见,只有三个平行于 xy 平面的应变分量是待求的,这类问题称为平面应变问题.由广义胡克定律(6.4-6),得应力分量为

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{xx}=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\\&\sigma_{yy}=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\\&\sigma_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0\end{aligned}\right\}\qquad(8.6-4)$$

由(6.4-11)式及(8.6-3)式的第3式,得

$$\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}[\sigma_{zz}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})]=0$$

因此

$$\sigma_{zz}=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\qquad(8.6-5)$$

这样,静力平衡方程(4.2-6)式简化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+F_x=0\\&\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+F_y=0\end{aligned}\right\}\qquad(8.6-6)$$

相容方程(5.4-5)式中的第一个方程成为

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2\varepsilon_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

其余5个方程恒能满足.应用(8.6-3)、(8.6-4)及(8.6-6)式,上式可化成

$$\nabla^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=-\frac{1}{1-\nu}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)\tag{8.6-7}$$

式中

$$\frac{1}{1-\nu}=\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned}P_x&=\sigma_{xx}n_x+\sigma_{xy}n_y\\P_y&=\sigma_{xy}n_x+\sigma_{yy}n_y\end{aligned}\right\}\quad 在\ c_1\ 上\tag{8.6-8a}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar u&=u(x,y)\\\bar v&=v(x,y)\end{aligned}\right\}\quad 在\ c_2\ 上\tag{8.6-8b}$$

上式中 $c_1+c_2=c$,c 为柱形体横截面的周界.

上面推导的平面应变问题的基本方程是在直角坐标系中建立的.下面将它们转换成以普遍张量表示,使它们在任意曲线坐标系中也成立.

$$\left.\begin{aligned}&静力平衡方程:\quad \sigma^{\alpha\beta}|_\beta+F^\alpha=0\\&物理方程:\quad \sigma^\alpha_\beta=\lambda\delta^\alpha_\beta u^\gamma|_\gamma+\mu(u^\alpha|_\beta+u_\beta|^\alpha)\\&相容方程:\quad \sigma^\alpha_\alpha|^\gamma_\gamma=-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}F^\gamma|_\gamma\end{aligned}\right\}\tag{8.6-9}$$

$$边界条件:\quad\left.\begin{aligned}P^\alpha&=\sigma^{\alpha\beta}n_\beta\quad 在\ c_1\ 上\\\bar u_\alpha&=u_\alpha\quad 在\ c_2\ 上\end{aligned}\right\}\tag{8.6-10}$$

上式中指标 α、β、γ 的范围是1、2.

二、平面应力问题

今考虑一厚度为 h 的等厚度薄板,h 远小于薄板平面的尺度.采用直角坐标系,如图8-9.载荷及约束反力作用在 x、y 平面内,构成自平衡力系.体力

$$F_x=F_x(x,y)$$
$$F_y=F_y(x,y)$$
$$F_z=0$$

表面力沿板厚方向的分布对称于板的中面,即

$$P_x(x,y,z)=P_x(x,y,-z)$$
$$P_y(x,y,z)=P_y(x,y,-z)$$
$$P_z=0$$

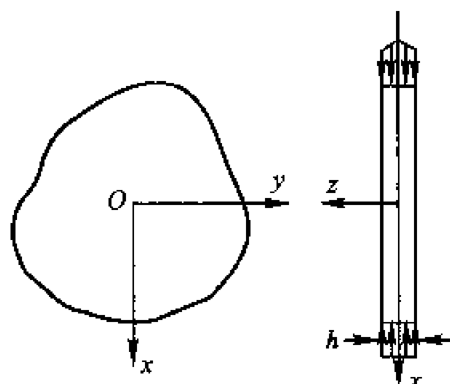


图 8 9

板的两表面 $\left(z=\pm\frac{h}{2}\right)$ 上没有外力作用.因此

$$(\sigma_{xz})|_{\pm\frac{h}{2}}=0,\quad (\sigma_{yz})|_{\pm\frac{h}{2}}=0,$$
$$(\sigma_{zz})|_{\pm\frac{h}{2}}=0$$

由于板很薄,外力在板厚方向的分布对称于板的中面,因而可以认为板内应力分量

$$\sigma_{xz}=\sigma_{yz}=\sigma_{zz}=0 \tag{8.6-11}$$

这样,只剩下平行于板中面(xy 平面)的三个应力分量 $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}$ 是待求的,这类问题称为平面应力问题.由广义胡克定律(6.4-6)及变形几何方程(5.3-3)和(8.6-11)式,得

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}&=\lambda(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})+2\mu\varepsilon_{zz}\\&=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=0\end{aligned}$$

由此得

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{8.6-12}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\\&=\lambda'\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\\\sigma_{yy}&=\lambda'\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\\\sigma_{xy}&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \tag{8.6-13}$$

式中

$$\lambda'=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}=\frac{\nu E}{1-\nu^2} \tag{8.6-14}$$

静力平衡方程(4.2-6)简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+F_x(x,y)=0\\\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+F_y(x,y)=0\end{aligned}\right\}\tag{8.6-15}$$

与(8.6－7)式相似,相容方程可以用应力表示为

$$\nabla^2(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=-(1+\nu)\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)\tag{8.6-16}$$

式中

$$1+\nu=\frac{2(\lambda'+\mu)}{\lambda'+2\mu}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned}P_x=\sigma_{xx}n_x+\sigma_{xy}n_y\\P_y=\sigma_{yx}n_x+\sigma_{yy}n_y\end{aligned}\right\}\quad 在\ c_1\ 上\tag{8.6-17}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}=u(x,y)\\\bar{v}=v(x,y)\end{aligned}\right\}\quad 在\ c_2\ 上\tag{8.6-18}$$

式中 $c_1+c_2=c$,c 是平板中面的周界.

将平面应力问题的基本方程加以综合,并以普遍张量表示如下:

$$\left.\begin{aligned}&静力平衡方程:\quad \sigma^{\alpha\beta}|_\beta+F^\alpha=0\\&物理方程:\quad \sigma^\alpha_\beta=\lambda'\delta^\alpha_\beta u^\gamma|_\gamma+\mu(u^\alpha|_\beta+u_\beta|^\alpha)\\&相容方程:\quad \sigma^\alpha_\alpha|^\gamma_\gamma=-\frac{2(\lambda'+\mu)}{\lambda'+2\mu}F^\gamma|_\gamma=-(1+\nu)F^\gamma|_\gamma\end{aligned}\right\}\tag{8.6-19}$$

$$\left.\begin{aligned}边界条件:\quad P^\alpha=\sigma^{\alpha\beta}n_\beta\quad 在\ c_1\ 上\\\bar{u}_\alpha=u_\alpha\quad 在\ c_2\ 上\end{aligned}\right\}\tag{8.6-20}$$

上式中指标 α、β、γ 的范围是1、2.

比较平面应变问题的基本方程(8.6－9)与平面应力问题的基本方程(8.6－19)可知,它们的形式是一样的,只需将平面应变方程中的拉梅常数 λ 代之以 λ',即可得到平面应力问题的相应的方程.λ' 与 λ、μ(或 ν,E)的关系见(8.6－14)式.

三、艾里(Airy)应力函数

设体力有势,即

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x},\quad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}\tag{8.6-21}$$

式中 V 为体力力势．艾里(1801—1892)引进应力函数 $\Phi(x,y)$，假设

$$\sigma_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{8.6-22a}$$

则静力平衡方程(8.6－6)可写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-V\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{yy}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-V\right)=0$$

若取

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+V \tag{8.6-22b}$$

$$\sigma_{yy}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+V \tag{8.6-22c}$$

则平衡方程恒能满足．$\Phi(x,y)$称为艾里应力函数．将(8.6－22)式代入(8.6－7)式，并应用(8.6－21)式，可得

$$\nabla^4\Phi+\frac{1-2\nu}{1-\nu}\nabla^2V=0 \tag{8.6-23a}$$

对于平面应力问题，则由(8.6－16)式，可得到一个与(8.6－23a)相似的方程：

$$\nabla^4\Phi+(1-\nu)\nabla^2V=0 \tag{8.6-23b}$$

满足(8.6－23a)式/(8.6－23b)式的应力函数 $\Phi(x,y)$会给出满足静力平衡方程的平面应变/平面应力问题的应力场，相应于此应力场的应变场满足相容方程．若 $V\equiv0$，即体力场为0，则平面应变问题和平面应力问题的应力函数都满足以下的方程：

$$\nabla^4\Phi=0 \tag{8.6-24}$$

这便是平面问题的基本微分方程，它是双调和方程．对于直角坐标：

$$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{8.6-25}$$

由此可知，艾里应力函数是双调和函数．

用直角坐标描述的平面问题基本方程可以转换成张量方程，它们在任意曲线坐标系中成立．

$$\sigma^{\alpha\beta}=\in^{\alpha\gamma}\in^{\beta\delta}\Phi|_{\gamma\delta}+g^{\alpha\beta}V \tag{8.6-22'}$$

$$\Phi\big|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}+\frac{1-2\nu}{1-\nu}V\big|_{\alpha}^{\alpha}=0 \quad (平面应变问题) \quad (8.6-23a')$$

$$\Phi\big|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}+(1-\nu)V\big|_{\alpha}^{\alpha}=0 \quad (平面应力问题) \quad (8.6-23b')$$

若不考虑体力,则

$$\sigma^{\alpha\beta}=\in^{\alpha\gamma}\in^{\beta\delta}\Phi\big|_{\gamma\delta} \quad (8.6-22'')$$

$$\Phi\big|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}=0 \quad (8.6-24')$$

在以上公式中,指标 α、β、γ、δ 的范围是 1、2. 以上公式在任意平面曲线坐标系中成立.

§8.7 平面问题举例

例 1 受集中力作用的悬臂梁

今讨论受集中力 F 作用的悬臂梁,如图 8-10. 采用直角坐标系. 设梁的厚度 b 与 h 相比很小,则可以作为平面应力问题处理. 略去体力. 函数 xy^3 和 xy 都是双调和函数,它们满足双调和方程(8.6-24). 试取下式作为本题的应力函数:

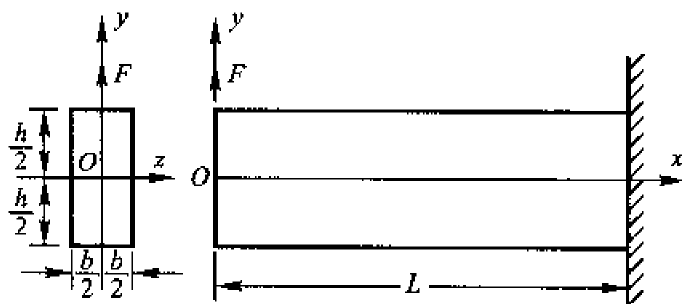


图 8-10

$$\Phi=\frac{1}{6}Cxy^3+Bxy \quad (8.7-1)$$

式中 C、B 是待定的常数. 梁的上、下表面没有剪应力,因此

$$\sigma_{xy}\left(x,\pm\frac{h}{2}\right)=-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\right)_{\left(x,\pm\frac{h}{2}\right)}=-\frac{1}{8}Ch^2-B=0$$

$$C=-\frac{8B}{h^2}$$

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=Cxy=-\frac{8B}{h^2}xy$$

$$\sigma_{yy}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0$$

$$\sigma_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=B\left[\left(\frac{2y}{h}\right)^2-1\right]$$

在梁左端($x=0$),存在以下关系:

$$-F=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xy}b\,\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}Bbh$$

由此得

$$B=\frac{3}{2}\frac{F}{bh}$$

这样,应力场是

$$\sigma_{xx}=-\frac{Fxy}{I},\quad \sigma_{yy}=0,\quad \sigma_{xy}=\frac{F}{2I}\left[y^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] \tag{8.7-2}$$

式中

$$I=\frac{1}{12}bh^3$$

下面计算位移场.由(5.3-3′)式及(6.4-11)式可求得与应力场(8.7-2)相对应的应变场是:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sigma_{xx}}{E}=-\frac{Fxy}{EI}\\ \varepsilon_{yy}&=\frac{\partial v}{\partial y}=-\nu\frac{\sigma_{xx}}{E}=\frac{\nu Fxy}{EI}\\ \varepsilon_{xy}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\sigma_{xy}}{2G}=\frac{F}{4GI}\left[y^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right]\end{aligned}\right\} \tag{8.7-3}$$

将(8.7-3)的前二式进行积分,得

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{Fx^2y}{2EI}+f(y)\\ v&=\frac{Fxy^2\nu}{2EI}+g(x)\end{aligned}\right\} \tag{8.7-4}$$

式中 $f(y)$,$g(x)$分别是 y 和 x 的任意函数.将(8.7-4)代入(8.7-3)第3式,得

$$\frac{\nu Fy^2}{2EI}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}-\frac{Fx^2}{2EI}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}=\frac{F}{2GI}\left[y^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] \tag{8.7-5a}$$

即

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}+\frac{\nu Fy^2}{2EI}-\frac{Fy^2}{2GI}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}-\frac{Fx^2}{2EI}\right)=-\frac{Fh^2}{8GI} \quad (8.7-5b)$$

上式等号右边$\left(-\frac{Fh^2}{8GI}\right)$是个常数,因此可得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}+\frac{\nu Fy^2}{2EI}-\frac{Fy^2}{2GI}=C_1 \quad (8.7-6a)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}-\frac{Fx^2}{2EI}=C_2 \quad (8.7-6b)$$

式中

$$C_1+C_2=-\frac{Fh^2}{8GI} \quad (8.7-7)$$

将(8.7－6)式积分,得

$$f(y)=\left(\frac{1}{G}-\frac{\nu}{E}\right)\frac{Fy^3}{6I}+C_1y+D_1$$

$$g(x)=\frac{Fx^3}{6EI}+C_2x+D_2$$

将上二式代入(8.7－4)式,并由于(8.7－7)式,得

$$\begin{aligned}u&=-\frac{Fx^2y}{2EI}+\frac{F}{6I}\left(\frac{1}{G}-\frac{\nu}{E}\right)y^3+C_1y+D_1\\ v&=\frac{\nu Fxy^2}{2EI}+\frac{Fx^3}{6EI}-\left(\frac{Fh^2}{8GI}+C_1\right)x+D_2\end{aligned} \quad (8.7-8)$$

梁右端有位移约束(边界条件):

$$u(L,0)=0, \quad v(L,0)=0 \quad (8.7-9)$$

将(8.7－8)式代入(8.7－9)式,得

$$D_1=0, \quad D_2=-\frac{FL^3}{6EI}+\left(\frac{Fh^2}{8GI}+C_1\right)L$$

这样

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{Fx^2y}{2EI}+\left(\frac{1}{G}-\frac{\nu}{E}\right)\frac{Fy^3}{6I}+C_1y\\ v&=\frac{\nu Fxy^2}{2EI}+\frac{F}{6EI}(x^3-L^3)+\left(\frac{Fh^2}{8GI}+C_1\right)(L-x)\end{aligned}\right\} \quad (8.7-10)$$

C_1 可以由梁右端的倾角约束条件决定,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(L,0)}=0$$

由此可得出 C_1. 这样,位移 u, v 可表示为

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{FL^2h}{2EI}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\frac{y}{h}+\frac{(2+\nu)Fh^3}{6EI}\left(\frac{y}{h}\right)^3-\frac{Fh^3}{8GI}\frac{y}{h} \\ v &= \frac{FL^3}{6EI}\left[2-3\frac{x}{L}+\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]+\frac{\nu Fh^2L}{2EI}\frac{x}{L}\left(\frac{y}{h}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{8.7-11}$$

积分常数 C_1 也可以由梁的其他约束条件决定,例如 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(L,0)}=0$,或 $u\left(L, \pm\frac{h}{2}\right)=0$,由此得出的 u、v 式将与(8.7-11)式有所差别,读者可自行推导.

例 2 受拉力作用的平板上开圆孔

设一无限大平板受拉力作用,平板上开有半径为 a 的圆孔,圆心位置 $(x, y)=(0,0)$. 平板的应力在远离原点处为平行于 x 轴的均匀拉力 F_T,如图 8-11. 求解平板开圆孔后在拉力 F_T 作用下平板的应力场. 略去体力.

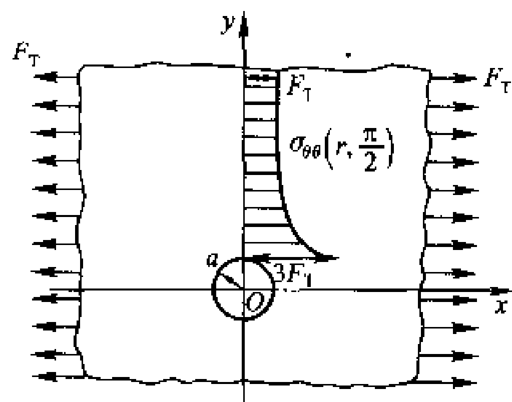


图 8-11

由于板的厚度远小于板平面的尺度,且载荷作用在板面内,本题可作为平面应力问题来处理. 采用平面极坐标系. 应用以普遍张量表示的平面问题的基本方程(8.6-22″)和(8.6-24′). 可以得出用平面极坐标表示的平面问题的基本方程. 读者可以作为练习自行推导. 现将有关公式列出如下.

以应力函数表示的应力分量为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)\end{aligned}\right\} \tag{8.7-12}$$

应力函数应满足双调和方程

$$\nabla^2(\nabla^2\Phi) = \nabla^4\Phi = 0 \tag{8.7-13}$$

式中

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

先考虑无圆孔、在均匀分布拉力 F_T 作用下的平板. 在这种情况下，应力函数 Φ 为

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}F_T y^2 = \frac{1}{4}F_T r^2(1 - \cos 2\theta) \tag{8.7-14}$$

由(8.6-22)式，上式给出的应力场为

$$\sigma_{xx}^0 = F_T, \quad \sigma_{yy}^0 = 0, \quad \sigma_{xy}^0 = 0$$

它与无圆孔的平板的应力场相符. 应用(8.7-12)和(8.7-14)式，给出应力场

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{rr}^0 &= \frac{1}{2}F_T(1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}^0 &= \frac{1}{2}F_T(1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta}^0 &= -\frac{1}{2}F_T\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{8.7-15}$$

以上式为参考，假设受拉力作用的平板中心开有圆孔的应力函数为

$$\Phi = f_0(r) + f_2(r)\cos 2\theta \tag{8.7-16}$$

将上式代入(8.7-13)式，并分离变量，得

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2 f_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_0}{dr}\right) = 0$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_2}{dr} - \frac{4 f_2}{r^2}\right) = 0$$

上列微分方程的解分别是

$$\left.\begin{aligned} f_0(r) &= C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \\ f_2(r) &= C_5 r^2 + C_6 r^4 + \frac{C_7}{r^2} + C_8 \end{aligned}\right\} \tag{8.7-17}$$

将(8.7－17)式代入(8.7－16)式，然后将得出的结果代入(8.7－12)式，得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_1(1+2\ln r) + 2C_2 + \frac{C_3}{r^2} - \left(2C_5 + \frac{6C_7}{r^4} + \frac{4C_8}{r^2}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_1(3+2\ln r) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + \left(2C_5 + 12C_6 r^2 + \frac{6C_7}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} &= \left(2C_5 + 6C_6 r^2 - \frac{6C_7}{r^4} - \frac{2C_8}{r^2}\right)\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.7-18}$$

在圆孔表面(a,θ)法向应力和剪应力分量均等于0，即

$$\sigma_{rr}(a,\theta) = \sigma_{r\theta}(a,\theta) = 0 \tag{8.7-19}$$

开圆孔对平板应力场的扰动不会波及远离圆孔的区域，因此，在远离圆孔处，平板的应力应如(8.7－15)式所示，即

$$\left.\begin{aligned} \lim_{r\to\infty}\sigma_{rr} &= \frac{1}{2}F_{\mathrm{T}}(1+\cos 2\theta) \\ \lim_{r\to\infty}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}F_{\mathrm{T}}(1-\cos 2\theta) \\ \lim_{r\to\infty}\sigma_{r\theta} &= -\frac{1}{2}F_{\mathrm{T}}\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.7-20}$$

将(8.7－18)式代入(8.7－19)式和(8.7－20)式，得

$$C_1 = C_6 = 0,\quad C_2 = -C_5 = \frac{F_{\mathrm{T}}}{4},\quad C_8 = -C_3 = \frac{a^2}{2}F_{\mathrm{T}},\quad C_7 = -\frac{a^4}{4}F_{\mathrm{T}}$$

常数 C_4 的值对 σ_{rr}，$\sigma_{\theta\theta}$，$\sigma_{r\theta}$ 均无影响，故可以令 $C_4=0$. 将以上积分常数代入(8.7－18)式，得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{F_{\mathrm{T}}}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{F_{\mathrm{T}}}{2}\left(1+3\frac{a^4}{r^4}-4\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{F_{\mathrm{T}}}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{F_{\mathrm{T}}}{2}\left(1+3\frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{F_{\mathrm{T}}}{2}\left(1-3\frac{a^4}{r^4}+2\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{8.7-21}$$

由(8.7－21b)式可以看出，在垂直于拉力 F_T 方向的圆孔直径的末端，$\sigma_{\theta\theta}$ 有最大值：

$$\sigma_{\theta\theta}\left(a,\frac{\pi}{2}\right)=3F_T \qquad (8.7-22)$$

由此可知：开小圆孔的平板，在远离圆孔区受均匀分布拉力 F_T 作用时，在圆孔直径的端部，平板的应力最大，它的值是 $3F_T$，如图 8－11 所示．换言之，平板开小圆孔，在拉力作用下，孔口的“应力集中系数”是 3．

习　　题

1．一半径为 a 的完全刚性球体被一厚度为 h 的厚弹性球壳包围．若球壳承受外压 p，计算球壳内表面的径向和周向应力．

2．一无限弹性介质中有一球形空洞．空洞壁衬砌成一弹性球壳，该球体与介质密切结合．空洞内有压力为 p_0 的气体(图 8－12)．分析相邻介质中的应力场和位移场，后者是衬砌材料力学性质的函数．衬砌材料的力学性质与周围介质的力学性质不同．

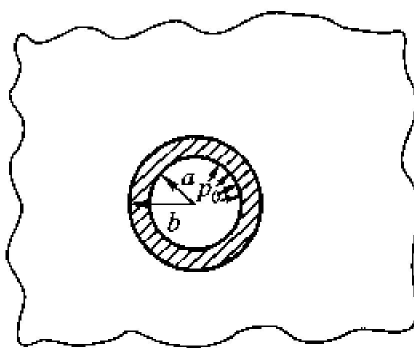


图　8－12

3．一无限弹性固体有一半径为 a 的圆柱形空洞延伸．空洞有压力为 p_0 的气体．分析固体内的位移场、应力场、应变场．假设本题为平面应变状态，与空洞轴线平行的方向无位移分量．

4．将图 8－13 的悬臂梁作为平面应力问题分析．已知

$$\sigma_{yy}\left(x,\frac{h}{2}\right)=p_0,\quad \sigma_{yy}\left(x,-\frac{h}{2}\right)=0,\quad \sigma_{xy}\left(x,\pm\frac{h}{2}\right)=0$$

$$b\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{xx}(0,y)\mathrm{d}y=b\int_{-h/2}^{h/2}y\sigma_{xx}(0,y)\mathrm{d}y=0$$

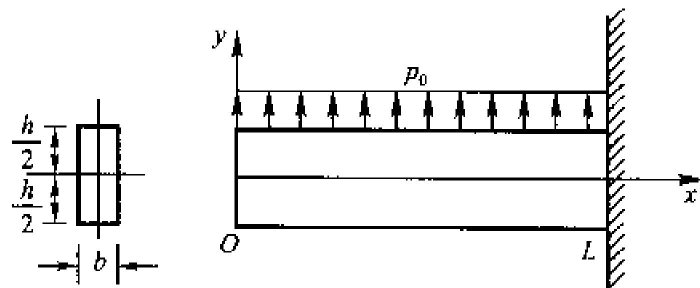


图　8－13

假设 $\sigma_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right) = xf(y)$. 求梁的应力和位移场.

5. 将图 8-14 中在均布载荷作用下的简支梁作为平面应力问题分析. 应用 $\Phi = x^2(a + dy + ey^3) + y^3(c + fy^2)$. 已知：

$$\sigma_{xy}\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = \sigma_{yy}(x, -h/2) = 0, \quad \sigma_{yy}(x, h/2) = p_0$$

$$b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx}(\pm L, y)\mathrm{d}y = b\int_{-h/2}^{h/2} y\sigma_{xx}(\pm L, y)\mathrm{d}y = 0$$

$$b\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xy}(\mp L, y)\mathrm{d}y = \pm p_0 L$$

求梁的应力场和位移场.

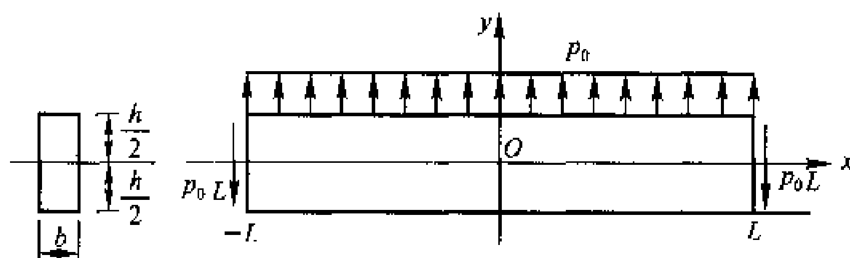


图 8-14

6. 采用普朗特应力函数法解圆形截面直杆的扭转问题. 得出结果后，将材料力学的相应解与之比较，并讨论.

第九章 几个应用弹性力学问题

从前一章的讨论可以看出，用解析方法求解弹性力学问题，需进行复杂的数学运算，而且只能对一些物体的几何形状和受力情况都比较简单的问题，才能求得解析解.

现代工程技术提出了很多比较复杂的有工程实用价值的弹性力学问题，要求这些问题的解既具有工程计算所需要的精度，而数学运算又不过分复杂，这就要求建立在工程上广泛应用的结构构件(如杆、梁、板等)的近似理论.

本章从弹性力学的基本方程出发，引进有关变形的适当假设，使基本方程适当简化，从而建立杆、梁、板的近似理论. 它们在工程上有广泛的应用价值，常称为应用弹性力学(Applied Elasticity)问题. 本章通过几个应用弹性力学问题的讨论，使读者理解如何从弹性力学基本方程出发，通过适当的简化，以建立具体问题的近似理论.

本章讨论在工程上广泛应用的铁木辛柯(Timoshenko)梁理论，欧拉－伯努利(Euler－Bernoulli)梁理论，中厚板(赖斯纳(Reissner)板)理论，薄板小挠度理论等几个应用弹性力学问题.

§9.1 铁木辛柯梁理论

梁是一个横向受载的细长构件，它的长度远大于其横截面的最大线尺度，横截面有对称轴. 采用直角坐标系，x 轴通过横截面的形心，z 轴为横截面的对称轴，如图 9－1. 设作用在梁上的横向载荷对称于 $x-z$ 平面，即

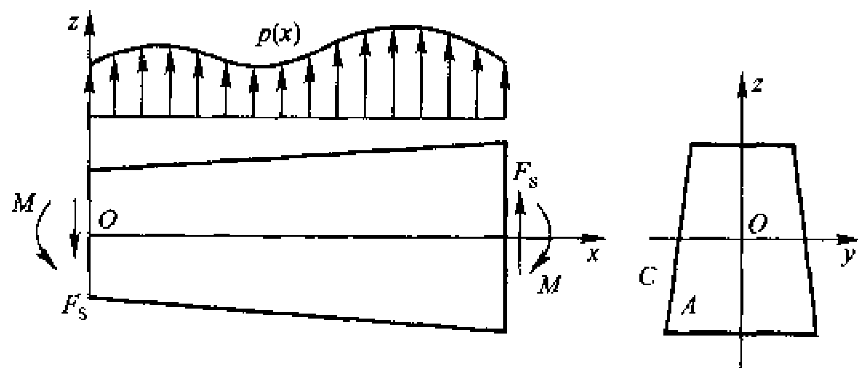


图 9－1

$$
\begin{aligned}
&P_x = 0, P_y = 0, \\
&P_z(x, y, z) = P_z(x, -y, z)
\end{aligned} \tag{9.1-1}
$$

定义弯矩 M、剪力 F_S(需说明,F_S 中的 S 不是张量指标,只表示这个力 F 是剪力(shear).)为

$$
\left.
\begin{aligned}
M &= \int_A z\sigma_{xx}\,\mathrm{d}A \\
F_S &= \int_A \sigma_{xz}\,\mathrm{d}A
\end{aligned}
\right\} \tag{9.1-2}
$$

积分是对梁的横截面 A 运算,A 的周界为 C.设梁内各点的位移分量为

$$
\left.
\begin{aligned}
u_x &= z\psi(x) \\
u_z &= w(x)
\end{aligned}
\right\} \tag{9.1-3}
$$

(9.1-3)式包含两层意义:① 在梁未变形状态(初始状态)垂直于梁轴线的横截面,在梁变形后仍保持为平面,$\psi(x)$表示横截面的转角,以顺时针方向为正;② 任一横截面上所有点的垂向位移相同,即 w 只是 x 的函数,与 y、z 无关.这样,

$$
\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = z\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}
$$

$$
\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\psi + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)
$$

由广义胡克定律(6.4-5)和(6.4-6)式:

$$
\sigma_{xx} = Ez\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} + \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})
$$

$$
\sigma_{xz} = 2G\varepsilon_{xz} = G\left(\psi + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)
$$

现从两个方面对所讨论的问题作进一步简化:① 略去 σ_{xx} 表示式中的 $\nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})$项;② 在 σ_{xz} 表示式中,以 k^2G 代替 G,k^2 是一个常数,称为剪切系数,它表示梁的横截面上的平均剪应变(也称切应变)与横截面形心处的剪应变之比.引入系数 k^2 是计及梁横截面剪应变分布的不均匀性,这样可使梁的近似理论更接近于三维弹性理论.k^2 的值与横截面的形状有关,可由多种方法决定.参见 Cowper G.R. "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory"(J. Appl. Mech, June,1966,335-340).表 9-1 列出 k^2 的一些数值.

表 9-1 剪切系数 k^2 的值

泊松系数 ν	矩形截面	圆形截面
0.0	0.833	0.857
0.3	0.850	0.886
0.5	0.870	0.900

基于上述两方面的简化,应力-位移的近似关系为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= Ez\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \\ \sigma_{xz} &= k^2 G\left(\psi + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9.1-4}$$

将(9.1-4)式代入(9.1-2)式得出弯矩、剪力与位移的关系为

$$\left.\begin{aligned} M &= EI\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} \\ F_S &= k^2 GA\left(\psi + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9.1-5}$$

式中,$I = \int_A z^2 \mathrm{d}A$ 是梁的横截面 A 对于 y 轴的惯性矩. 由(9.1-4)及(9.1-5)式可得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{Mz}{I} \\ \sigma_{xz} &= \frac{F_S}{A} \end{aligned}\right\} \tag{9.1-6}$$

应用静力平衡方程(4.2-6),略去体力,对它的第一式的各项乘以 z 并对于梁的横截面 A 进行积分运算

$$\int_A z\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}A + \int_A z\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right)\mathrm{d}A = 0 \tag{9.1-7a}$$

利用(9.1-2a)式,上式中的第一个积分成为

$$\int_A z\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\mathrm{d}A = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{9.1-7b}$$

应用平面格林定理,(9.1-7a)式中的第 2 个积分成为

$$\begin{aligned} &\int_A z\left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right)\mathrm{d}A \\ &= \int_A \left[\frac{\partial}{\partial y}(z\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(z\sigma_{xz}) - \sigma_{xz}\right]\mathrm{d}A \end{aligned}$$

$$= \oint_c z(\sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z)\mathrm{d}s - \int_A \sigma_{xz}\mathrm{d}A \qquad (9.1-7c)$$

在梁的侧表面(即在周界 C),$n_x=0$(对于等截面直梁)或 $n_x\approx0$(对于截面变化缓慢的变截面梁).由(4.2-7)式及(9.1-1)式

$$P_x=\sigma_{xy}n_y+\sigma_{xz}n_z=0,\text{在 } C \text{ 上}$$

由以上的结果,并由于(9.1-2b)式,(9.1-7c)式成为

$$\int_A z\left(\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)\mathrm{d}A=-F_S \qquad (9.1-7d)$$

这样,应用(9.1-7b)及(9.1-7d)式,(9.1-7a)式变为

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}-F_S=0 \qquad (9.1-8a)$$

对静力平衡方程(4.2-6)式中的第3式进行以下的积分运算:

$$\int_A \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}\mathrm{d}A+\int_A\left(\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\mathrm{d}A=0 \qquad (9.1-7e)$$

应用(9.1-2b),上式中第1个积分成为

$$\int_A \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x}\mathrm{d}A=\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x} \qquad (9.1-7f)$$

应用平面格林定理,(9.1-7e)式中的第2个积分成为

$$\int_A\left(\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\mathrm{d}A=\oint_c(\sigma_{zy}n_y+\sigma_{zz}n_z)\mathrm{d}s$$

$$=\oint_c P_z\mathrm{d}s=p(x) \qquad (9.1-7g)$$

因为,由(4.2-7)式可知,在梁的侧表面,$P_z=\sigma_{zy}n_y+\sigma_{zz}n_z$,($n_x=0$,或 $n_x\approx0$),而 $p(x)$ 表示作用在梁上沿梁长方向分布的横向载荷的强度.这样,由(9.1-7f)和(9.1-7g)式,(9.1-7e)式可写成下式:

$$\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x}+p(x)=0 \qquad (9.1-8b)$$

方程(9.1-8)便是所讨论的梁理论的以应力合力表示的平衡方程.将(9.1-5)式代入(9.1-8)式,便得出以位移表示的平衡方程:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k^2GA\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+\psi\right)\right]+p(x)=0\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\right)-k^2GA\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+\psi\right)=0\end{aligned}\right\} \qquad (9.1-9)$$

方程(9.1-9)便是所谓的铁木辛柯梁方程.它是著名力学家铁木辛柯(1878—1972)提出来的,因此以他的名字命名.铁木辛柯梁理论计及梁的

弯曲变形以及剪变形.

例 应用铁木辛柯梁理论计算图 9－2 所示的等截面悬臂梁.

由于 $p(x)=0$，由(9.1－8b)式，

$$\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x}=-p(x)=0$$

$$F_S=C_1$$

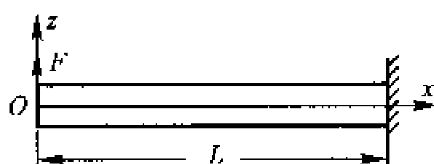


图 9 2

但

$$F_S(0)=-F$$

因此

$$C_1=-F\text{，即 }F_S=-F.$$

由(9.1－8a)式，

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=-F$$

$$M=-Fx+C_2$$

$M(0)=0$，因此 $C_2=0$，$M=-Fx$. 应用(9.1－5a)，得

$$EI\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=M=-Fx$$

$$EI\psi=-\frac{1}{2}Gx^2+C_3$$

由于梁右端固定，$\psi(L)=0$，因此 $C_3=\frac{1}{2}FL^2$，

$$EI\psi=\frac{1}{2}F(L^2-x^2)$$

由(9.1－5b)式，得

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{F_S}{k^2GA}-\psi=-\frac{F}{k^2GA}+\frac{F}{2EI}(x^2-L^2)$$

将上式积分，得

$$w=-\frac{F}{k^2GA}x+\frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{3}-L^2x\right)+C_4$$

$$=\frac{FL^3}{EI}\left[-\frac{EI}{k^2GAL^2}\left(\frac{x}{L}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]+C_4$$

在 $x=L$ 处，$w(L)=0$，因此

$$C_4=\frac{FL^3}{EI}\left(\frac{1}{3}+\frac{EI}{k^2GAL^2}\right)$$

$$w=\frac{FL^3}{EI}\left[-\frac{EI}{k^2GAL^2}\left(\frac{x}{L}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{L}\right)^3+\frac{1}{3}+\frac{EI}{k^2GAL^2}\right]$$

在 $x=0$ 处(左端), w 达到最大值 $w(0)$

$$w(0)=\frac{FL^3}{EI}\left[\frac{1}{3}+\frac{EI}{k^2GAL^2}\right] \tag{9.1-10a}$$

或

$$\frac{EIw(0)}{FL^3}=\frac{1}{3}+\frac{EI}{k^2GAL^2}=\frac{1}{3}+\frac{2(1+\nu)I}{k^2AL^2} \tag{9.1-10b}$$

若梁的截面为矩形,底为 b,高为 h,则 $I=\frac{1}{12}bh^3$,这样,

$$\frac{EIw(0)}{FL^3}=\frac{1}{3}+\frac{1+\nu}{6k^2}\left(\frac{h}{L}\right)^2 \tag{9.1-10c}$$

若取 $\nu=0.3, k^2=0.850$,则

$$\frac{EIw(0)}{FL^3}=\frac{1}{3}+0.202\left(\frac{h}{L}\right)^2 \tag{9.1-10d}$$

(9.1-10d)式可以用曲线表示如图 9-3 所示.若令 $k^2G\to\infty$,即略去剪变形的影响,仅考虑由于弯曲产生的梁的挠度,则 $\frac{EIw(0)}{FL^3}=\frac{1}{3}$.由图 9-3 可以看出,梁的最大挠度是梁的细长比 $\left(\frac{h}{L}\right)$ 的函数.对于非常细长的梁,$\frac{h}{L}\to 0$,此时,$\frac{EIw(0)}{FL^3}=\frac{1}{3}$.由此可见,剪变形对于梁的挠度的贡献随 $\frac{h}{L}$ 的增大而增大,即对于粗短梁,剪变形对梁的挠度(总变形)的影响较细长梁为大.

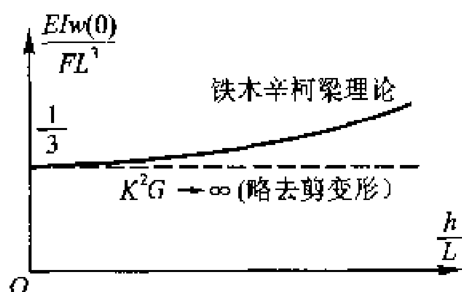


图 9-3

§9.2 欧拉－伯努利梁理论

若在梁的总变形(挠度)中,剪变形与弯曲变形相比较,前者可以略去,则可对铁木辛柯梁理论作一些修正,可以设(9.1－5b)式中

$$\psi = -\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}, \quad k^2 G \to \infty \tag{9.2-1}$$

这样,$F_S \neq 0$. 这个假设的意义是:在梁未变形状态垂直于梁轴线的横截面,在梁变形后仍保持为平面且垂直于变形后的梁轴线. 这样,由(9.1－5a)及(9.1－8a)式可得

$$\left.\begin{aligned} M &= -EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \\ F_S &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9.2-2}$$

将(9.2－2b)代入(9.1－8b),得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right) = p(x) \tag{9.2-3}$$

若给定梁端的 w(或 F_S)以及$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$(或 M),则可得到方程(9.2－3)的惟一解. 方程(9.2－2)、(9.2－3)是欧拉－伯努利梁模型,这是以对这个问题进行研究的数学家、力学家欧拉(1707—1783)和伯努利(1700—1782)的名字命名的. 欧拉－伯努利梁理论以其形式简单,便于应用而在工程上被广泛地采用,因此,这一理论在材料力学课程中有详细的讨论. 需要指出的是,在历史上,先有欧拉－伯努利梁理论,它对于细长梁$\left(\frac{h}{L}\to 0\text{, 见图 9-3}\right)$是正确的. 在这种情况下,略去剪变形,即假设梁只有弯曲变形,而梁对于剪变形是完全刚性的,这样处理,不会产生明显的误差. 对于粗短梁$\left(\frac{h}{L}\text{ 并非很小}\right)$,剪变形在梁的总变形(挠度)中有较大的贡献,剪变形与弯曲变形相比前者不能略去. 因此,对于粗短梁必须采用铁木辛柯梁模型进行计算. 铁木辛柯梁理论是欧拉－伯努利梁理论的发展.

例 弹性基础梁

现应用欧拉－伯努利梁理论讨论弹性基础梁,它在结构力学中有广泛的应用. 梁长为 L,等截面,两端简支,受均布载荷 p_0,弹性基础的刚性

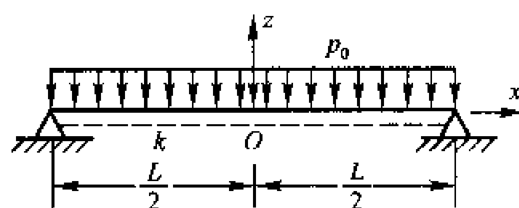


图 9-4

系数为 k,弹性基础的反力的大小与梁的挠度 w 成正比,方向与 w 相反.由于问题的对称性,坐标原点取梁的中点,如图 9-4.应用(9.2-3)式,梁的基本微分方程为

$$EI\frac{d^4 w}{dx^4}=-p_0-kw \tag{9.2-4a}$$

或

$$\frac{d^4 w}{dx^4}+4\beta^4 w=-\frac{p_0}{EI} \tag{9.2-4b}$$

式中

$$4\beta^4=\frac{k}{EI}>0 \tag{9.2-4c}$$

方程(9.2-4b)的解为

$$\begin{aligned} w = {} & C_1\cos\beta x\cdot\cosh\beta x + C_2\sin\beta x\cdot\sinh\beta x + \\ & C_3\cos\beta x\cdot\sinh\beta x + C_4\sin\beta x\cdot\cosh\beta x - \frac{p_0}{k} \end{aligned} \tag{9.2-5}$$

边界条件是:

$$w\left(\pm\frac{L}{2}\right)=0,\ M\left(\pm\frac{L}{2}\right)=0 \tag{9.2-6}$$

由边界条件可得

$$C_3=C_4=0$$

$$C_1=\frac{p_0}{k}\left[\frac{\cos\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cdot\cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cdot\cosh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cdot\sinh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)}\right]$$

$$C_2=\frac{p_0}{k}\left[\frac{\sin\left(\frac{\beta L}{2}\right)\sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cdot\cosh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)\cdot\sinh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)}\right]$$

因此

$$w = C_1 \cos \beta x \cdot \cosh \beta x + C_2 \sin \beta x \cdot \sinh \beta x - \frac{p_0}{k} \tag{9.2-7}$$

令

$$a = \frac{\beta L}{2}, \quad \alpha = 4a^4 = \frac{kL^4}{16EI} \tag{9.2-8}$$

则

$$\cos^2\left(\frac{\beta L}{2}\right) \cdot \cosh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta L}{2}\right) \cdot \sinh^2\left(\frac{\beta L}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\cosh 2a + \cos 2a) = \frac{\Delta}{2}$$

$$\Delta = \cosh 2a + \cos 2a \tag{9.2-9}$$

因此

$$C_1 = \frac{p_0}{k} \cdot \frac{2}{\Delta} \cos a \cosh a, \quad C_2 = \frac{p_0}{k} \frac{2}{\Delta} \sin a \sinh a$$

$$w = \frac{p_0}{k}\left[\frac{2}{\Delta}(\cos a \cosh a \cos \beta x \cosh \beta x + \sin a \sinh a \sin \beta x \sinh \beta x) - 1\right] \tag{9.2-10}$$

$$M = \frac{p_0}{\beta^2} \frac{1}{\Delta}(\cos a \cosh a \sin \beta x \sinh \beta x - \sin a \sinh a \cos \beta x \cosh \beta x)$$

$$= \frac{p_0 L^2}{4a^2} \cdot \frac{1}{\Delta}(\cos a \cosh a \sin \beta x \sinh \beta x - \sin a \sinh a \cos \beta x \cosh \beta x) \tag{9.2-11}$$

在梁中点

$$w(0) = \frac{p_0}{k}\left[\frac{2}{\Delta} \cos a \cosh a - 1\right] \tag{9.2-12}$$

$$M(0) = -\frac{p_0 L^2}{4a^2} \frac{1}{\Delta} \sin a \sinh a \tag{9.2-13}$$

§9.3 中厚板理论(赖斯纳板理论)

中等厚度板(“中厚板”)是相对于“薄板”而言.“薄板”是指板的厚度

远小于板中面的特征长度."中厚板"的厚度虽然也远小于板中面的尺寸,但"中厚板"理论与"薄板"理论的区别在于:中厚板受载后由横向剪力引起的变形和弯曲变形属同一量级;分析中厚板在载荷作用下的应力和变形时必须考虑横向剪切效应;而对于"薄板"则不考虑横向剪切效应.中厚板理论由赖斯纳(Reissner)首先提出,所以又称为赖斯纳板理论.它实质上是把铁木辛柯梁理论由一维扩展到二维,即由梁扩展到板.

今考虑矩形板,中面的面积为 A,周界为 C,作用在板面上每单位面积的载荷为 p,采用直角坐标描述,板元素及其上应力分量的正方向如图 9-5(a).

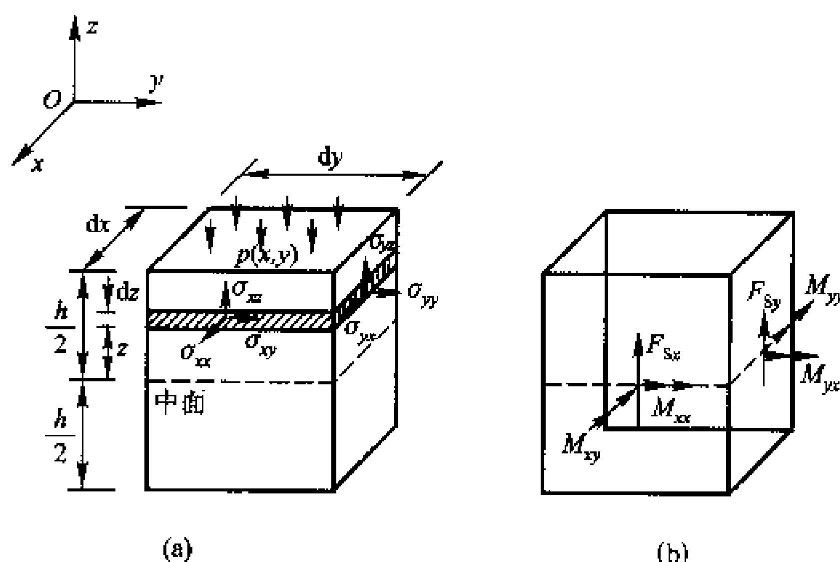


图 9-5 板元素及合应力

一、定义板的合应力——剪力,力矩

$$F_{S\alpha}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha z}\,\mathrm{d}z \qquad (9.3-1a)$$

$$M_{\alpha\beta}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha\beta}z\,\mathrm{d}z \qquad (9.3-1b)$$

$F_{S\alpha}$、$M_{\alpha\beta}$ 分别是单位长度的剪力和单位长度的力矩.指标 α,β 的范围为 1,2,即 x,y.指标 z 只表示方向,当指标 z 重复出现时,没有求和的含义.这样

$F_{S\alpha}$——F_{Sx},F_{Sy}(剪力)

$M_{\alpha\beta}$——M_{xx},M_{yy}(弯矩)

M_{xy},M_{yx}(扭矩)

它们的正方向如图 9-5(b)所示,是由相应的应力分量的正方向和坐标

的正方向决定.

二、板的平衡方程

略去体力,平衡方程(4.2-6)可写成以下形式:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta}+\sigma_{\alpha z,z}=0 \tag{9.3-2a}$$

$$\sigma_{z\alpha,\alpha}+\sigma_{zz,z}=0 \tag{9.3-2b}$$

求和约定只适用于指标 α,β. 对(9.3-2b)式的每一项进行积分运算 $\int_{-h/2}^{h/2}\cdots\mathrm{d}z$:

$$\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{z\alpha,\alpha}\mathrm{d}z+\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{zz,z}\mathrm{d}z=0 \tag{9.3-3a}$$

但

$$\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{zz,z}\mathrm{d}z=\sigma_{zz}\left(\frac{h}{2}\right)-\sigma_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right)=p(x,y) \tag{9.3-4}$$

$p(x,y)$是作用在板面上的横向载荷(力/单位面积),以正 z 方向的$p(x,y)$为正. 由于(9.3-4)及(9.3-1a)式,(9.3-3a)式可写成

$$F_{S\alpha,\alpha}+p=0 \tag{9.3-5a}$$

对(9.3-2a)式的每一项进行积分运算 $\int_{-h/2}^{h/2}\cdots z\mathrm{d}z$,则有

$$\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha\beta,\beta}z\mathrm{d}z+\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha z,z}z\mathrm{d}z=0 \tag{9.3-3b}$$

对上式的第2个积分进行分部积分

$$\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha z,z}z\mathrm{d}z=(\sigma_{\alpha z}z)_{z=-h/2}^{z=h/2}-\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\alpha z}\mathrm{d}z=0-F_{S\alpha} \tag{9.3-3c}$$

在平板表面上没有剪应力 $\sigma_{\alpha z}$,因此上式中$(\sigma_{\alpha z}z)_{z=-h/2}^{z=h/2}=0$. 由于(9.3-3c)及(9.3-1b)式,(9.3-3b)式成为

$$M_{\alpha\beta,\beta}-F_{S\alpha}=0 \tag{9.3-5b}$$

(9.3-5a,b)是以剪力、弯/扭矩表示的板的平衡方程式.

三、板的应变

对板的变形作以下假设:

$$\begin{aligned}u_\alpha(x,y,z)&=z\psi_\alpha(x,y)\\u_z(x,y,z)&=w(x,y)\end{aligned} \tag{9.3-6}$$

即假设:① 在板的初始构形(未变形状态)垂直于板中面的直线素在板变形后依然保持为直线,ψ_α 为它的转角;② 在板未变形时垂直于板中面的直线素上所有的点有相同的横向位移 w;③ 中面没有伸展,即中面是板的"中性层".将(9.3-6)式代入变形几何方程(5.3-3)式,则有

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}z(\psi_{\alpha,\beta}+\psi_{\beta,\alpha})\\ \varepsilon_{\alpha z} &= \frac{1}{2}(\psi_\alpha + w_{,\alpha})\\ \varepsilon_{zz} &= 0\end{aligned}\right\}\tag{9.3-7}$$

定义板的"合应变"为

$$\left.\begin{aligned}m_{\alpha\beta} &= \frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{\alpha\beta}z\,\mathrm{d}z\\ q_\alpha &= \frac{2}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{\alpha z}\,\mathrm{d}z\end{aligned}\right\}\tag{9.3-8}$$

将(9.3-7)式代入(9.3-8)式,可得板的"合应变"-位移关系:

$$\left.\begin{aligned}m_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\psi_{\alpha,\beta}+\psi_{\beta,\alpha})\\ q_\alpha &= \psi_\alpha + w_{,\alpha}\end{aligned}\right\}\tag{9.3-9}$$

由(9.3-7)及(9.3-9)式,有

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = z m_{\alpha\beta},\quad \varepsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2}q_\alpha\tag{9.3-10}$$

四、应力-应变关系,"合应力"-"合应变"关系

应用广义胡克定律(6.4-5),则应力-应变关系可列出如下:

$$\left.\begin{aligned}E\varepsilon_{\alpha\beta} &= (1+\nu)\sigma_{\alpha\beta} - \nu\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - \nu\sigma_{zz}\delta_{\alpha\beta}\\ \sigma_{z\alpha} &= 2G\varepsilon_{z\alpha} = Gq_\alpha\end{aligned}\right\}\tag{9.3-11}$$

式中 $\sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{\alpha\alpha}$,令(9.3-11a)式中 $\alpha = \beta$,则有

$$E\varepsilon_{\alpha\alpha} = (1-\nu)\sigma_{\alpha\alpha} - 2\nu\sigma_{zz}$$

或

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E}{1-\nu}\varepsilon_{\alpha\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_{zz}$$

应用上式,则由(9.3-11a)式可得出以 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ 及 σ_{zz} 表示的 $\sigma_{\alpha\beta}$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz}\delta_{\alpha\beta}\tag{9.3-12a}$$

由于(9.3-10)式，上式可写成

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{Ez}{1-\nu^2}[(1-\nu)m_{\alpha\beta}+\nu m\delta_{\alpha\beta}]+\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz}\delta_{\alpha\beta}$$

(9.3-12b)

式中

$$m=m_{\alpha\alpha}=\psi_{\alpha,\alpha} \tag{9.3-13}$$

m 称为板的面积胀缩. 将(9.3-12)式代入(9.3-1b)式得

$$M_{\alpha\beta}=D[(1-\nu)m_{\alpha\beta}+\nu m\delta_{\alpha\beta}]+\frac{\nu\delta_{\alpha\beta}}{1-\nu}\int_{-h/2}^{h/2}z\sigma_{zz}\mathrm{d}z$$

(9.3-14a)

式中 $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 是板的抗弯刚度. 与此相似，将(9.3-11b)式代入(9.3-1a)式，得

$$F_{S\alpha}=Ghq_\alpha \tag{9.3-14b}$$

将(9.3-14)式从两方面加以修正：① 略去(9.3-14a)式等号右边的积分项，即略去应力 σ_{zz} 的影响；② 以 k^2G 代替(9.3-14b)式中的 G，k^2 是"剪切系数"，其意义与§9.1 的铁木辛柯梁理论中的 k^2 相似，k 是泊松比 ν 的近似的线性函数. 对于 $0<\nu<0.5$，$0.874<k<0.955$；对于 $\nu=0.3$，$k=0.922\,5$ 或 $k^2=0.86$. 这样，板的"合应力"-"合应变"关系的近似式可写成：

$$M_{\alpha\beta}=D[(1-\nu)m_{\alpha\beta}+\nu m\delta_{\alpha\beta}] \tag{9.3-15}$$
$$F_{S\alpha}=k^2Ghq_\alpha$$

将(9.3-9)和(9.3-13)式代入(9.3-15)式，可得合应力-位移关系：

$$M_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}D[(1-\nu)(\psi_{\alpha,\beta}+\psi_{\beta,\alpha})+2\nu\psi_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}]$$

(9.3-16a)

$$F_{S\alpha}=k^2Gh(\psi_\alpha+w_{,\alpha}) \tag{9.3-16b}$$

五、以位移表示的中厚板的平衡方程

将(9.3-16)式代入(9.3-5)式，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}D[(1-\nu)\psi_{\alpha,\beta\beta}+(1+\nu)\psi_{\beta,\beta\alpha}]-k^2Gh(\psi_\alpha+w_{,\alpha})=0\\&k^2Gh(\psi_{\alpha,\alpha}+w_{,\alpha\alpha})+p=0\end{aligned}\right\}$$

(9.3-17)

(9.3－17)式是以位移 w 和 ψ_α 表示的中厚板的平衡方程.这三个方程对于位移 w 和 ψ_α 是耦合的.但方程(9.3－17)可以解耦,现推导如下:由(9.3－16a)式:

$$M_{\alpha\beta,\beta}=\frac{1}{2}D[(1-\nu)\psi_{\alpha,\beta\beta}+(1+\nu)\psi_{\beta,\alpha\beta}] \quad (9.3-18a)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta\alpha}=\frac{1}{2}D[(1-\nu)\psi_{\alpha,\beta\beta\alpha}+(1+\nu)\psi_{\beta,\alpha\beta\alpha}]$$

$$=\frac{1}{2}D\cdot 2\psi_{\alpha,\beta\beta\alpha}=D\psi_{\alpha,\beta\beta\alpha} \quad (9.3-18b)$$

由(9.3－13)式

$$\nabla^2 m=\nabla^2(\psi_{\alpha,\alpha})=(\psi_{\alpha,\alpha})_{,\beta\beta}=\psi_{\alpha,\beta\beta\alpha} \quad (9.3-19)$$

由(9.3－5)式和(9.3－19)式,(9.3－18b)式成为

$$M_{\alpha\beta,\beta\alpha}=F_{S\alpha,\alpha}=-p=D\psi_{\alpha,\beta\beta\alpha}=D\nabla^2 m \quad (9.3-20)$$

由(9.3－17b)式及(9.3－13)式,

$$-p=F_{S\alpha,\alpha}=k^2Gh(\psi_{\alpha,\alpha}+w_{,\alpha\alpha})=k^2Gh(m+\nabla^2 w)$$

$$\nabla^2 w=-\frac{p}{k^2Gh}-m \quad (9.3-21a)$$

由(9.3－5b)、(9.3－18a)、(9.3－13)及(9.3－16b)式可得

$$F_{S\alpha}=M_{\alpha\beta,\beta}=\frac{1}{2}D[(1-\nu)\psi_{\alpha,\beta\beta}+(1+\nu)\psi_{\beta,\alpha\beta}]$$

$$=\frac{1}{2}D[(1-\nu)\nabla^2\psi_\alpha+(1+\nu)m_{,\alpha}]$$

$$=k^2Gh(\psi_\alpha+w_{,\alpha})$$

即

$$\left[\frac{D(1-\nu)}{2}\nabla^2-k^2Gh\right]\psi_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[k^2Ghw-\frac{D}{2}(1+\nu)m\right]$$

上式可化成

$$\left(\frac{h^2}{12k^2}\nabla^2-1\right)\psi_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(w-\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12k^2}m\right) \quad (9.3-21b)$$

应用(9.3－19)及(9.3－20)式,(9.3－21a)式可化成

$$\nabla^4 w=\frac{p}{D}-\frac{\nabla^2 p}{k^2Gh} \quad (9.3-22a)$$

(9.3－21b)式也可进一步化简

$$\left(\frac{h^2}{12k^2}\nabla^2-1\right)\nabla^4\psi_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\nabla^4 w-\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12k^2}\nabla^4 m\right)$$

利用(9.3-22a)及(9.3-20)式，可得

$$\begin{aligned}
&\nabla^4 w-\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12k^2}\nabla^4 m\\
&=\frac{p}{D}-\frac{\nabla^2 p}{k^2 Gh}+\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12k^2}\frac{\nabla^2 p}{D}\\
&=\frac{p}{D}-\frac{\nabla^2 p}{Dk^2}\left[\frac{D}{Gh}-\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{h^2}{12}\right]\\
&=\frac{p}{D}-\frac{\nabla^2 p}{Dk^2}\frac{h^2}{12}\\
&=\left(\frac{h^2}{12k^2}\nabla^2-1\right)\left(-\frac{p}{D}\right)
\end{aligned}$$

这样

$$\left(\frac{h^2}{12k^2}\nabla^2-1\right)\nabla^4\psi_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\left(\frac{h^2}{12k^2}\nabla^2-1\right)\left(-\frac{p}{D}\right)\right]$$

$$\left(\frac{h^2}{12k^2}\nabla^2-1\right)\left[D\nabla^4\psi_\alpha+\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}\right]=0 \qquad (9.3-22b)$$

方程(9.3-22a)和(9.3-22b)分别只有一个位移变量 w,ψ_α：

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^4 w=\frac{p}{D}-\frac{\nabla^2 p}{k^2 Gh}\\
&\left(\frac{h^2}{12k^2}\nabla^2-1\right)\left[D\nabla^4\psi_\alpha+\frac{\partial p}{\partial x_\alpha}\right]=0
\end{aligned}\right\} \qquad (9.3-22c)$$

方程(9.3-22)是由方程(9.3-17)解耦得出的，这便是中厚板(赖斯纳板)理论的基本方程.

六、边界条件

方程(9.3-17)或(9.3-22)可以得出惟一的解，只需给出沿板的周界 C 上的边界条件(如图 9-6)：

$$w\text{，或 } F_{Sn}=F_{S\alpha}n_\alpha \qquad (9.3-23a)$$

$$\text{及 }\psi_n\text{，或 } M_{nn}=M_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta \qquad (9.3-23b)$$

$$\text{以及 }\psi_s\text{，或 } M_{ns}=M_{\alpha\beta}n_\alpha s_\beta \qquad (9.3-23c)$$

式中

F_{Sn}——沿 C 每单位长度的横向剪力；

M_{nn}——沿 C 每单位长度的弯矩；

M_{ns}——沿 C 每单位长度的扭矩；

ψ_n,ψ_s——垂直于中面的线素的转角矢量 ψ 在边界 C 的法向/切向分量.

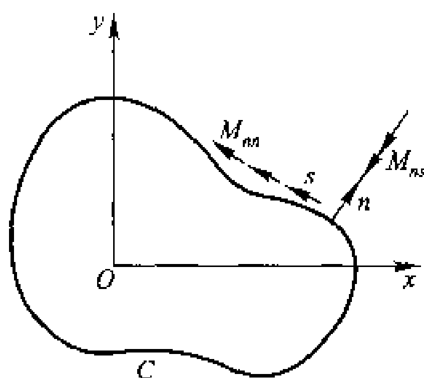


图 9-6

可以看出，中厚板（赖斯纳板）理论与铁木辛柯梁理论是相似的，只是前者是二维的，而后者是一维的. 中厚板理论计及板的弯曲变形以及剪切变形.

七、中厚板理论基本方程的普遍张量形式

中厚板理论的基本方程可以用普遍张量表示，它们适用于任意曲线坐标系.

平衡方程：

$$\left.\begin{aligned} &Dw\,|_{\beta\gamma}^{\beta\gamma} = p - \frac{h^2}{6k^2(1-\nu)}\,p\,|_{\beta}^{\beta} \\ &\frac{h^2}{12k^2}\left(D\psi_\alpha\,|_{\beta\gamma}^{\beta\gamma} + p\,|_\alpha\right)|_\lambda^\lambda - D\psi_\alpha\,|_{\beta\gamma}^{\beta\gamma} - p\,|_\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.3-22)'$$

合应变：

$$m_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\psi_\alpha\,|_\beta + \psi_\beta\,|_\alpha) \text{或} \ m_\beta^\alpha = \frac{1}{2}(\psi^\alpha\,|_\beta + \psi_\beta\,|^\alpha)$$

$$(9.3-9a)'$$

$$m = m_\alpha^\alpha = \psi^\alpha\,|_\alpha \qquad (9.3-13)'$$

$$q_\alpha = \psi_\alpha + w\,|_\alpha \qquad (9.3-9b)'$$

弯矩、扭矩：

$$M_\beta^\alpha = D[(1-\nu)m_\beta^\alpha + \nu m\,\delta_\beta^\alpha]$$

$$= D\left[\frac{1-\nu}{2}(\psi^{\alpha}|_{\beta} + \psi_{\beta}|^{\alpha}) + \nu\psi^{\gamma}|_{\gamma}\delta_{\beta}^{\alpha}\right]$$

(9.3-16a)′

剪力：

$$F_S^{\alpha} = F_{S\gamma}g^{\alpha\gamma} = k^2 Ghq_{\gamma}g^{\alpha\gamma} = k^2 Gh(\psi_{\gamma} + w|_{\gamma})g^{\alpha\gamma}$$

(9.3-16b)′

应力张量：

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{M^{\alpha\beta}z}{(h^3/12)} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\left[\frac{1-\nu}{2}(\psi_{\gamma}|^{\beta} + \psi^{\beta}|_{\gamma})g^{\alpha\gamma} + \nu\psi^{\gamma}|_{\gamma}g^{\alpha\beta}\right]$$

(9.3-12)′

$$\sigma^{\alpha z} = F_S^{\alpha}/h = k^2 G(\psi_{\gamma} + w|_{\gamma})g^{\alpha\gamma} \qquad (9.3-11)'$$

在以上各式中，指标 α、β、γ、λ 的范围是 1，2．指标 z 只表示方向．

例 简支矩形板如图 9-7，受分布横向载荷

$$p(x,y) = F\sin Mx\sin Ny \qquad (9.3-24)$$

式中 $F, M = \frac{m\pi}{a}, N = \frac{n\pi}{b}$ 是常数，$m, n = 1,2,3,\cdots$．

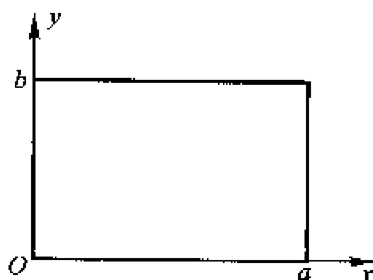


图 9-7

边界条件是

$$\left.\begin{aligned} w(0,y) &= M_{xx}(0,y) = \psi_y(0,y) = 0 \\ w(x,0) &= M_{yy}(x,0) = \psi_x(x,0) = 0 \\ w(a,y) &= M_{xx}(a,y) = \psi_y(a,y) = 0 \\ w(x,b) &= M_{yy}(x,b) = \psi_x(x,b) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9.3-25)$$

在载荷(9.3-24)作用下，满足边界条件(9.3-25)的、方程(9.3-22)的一个解是

$$\left.\begin{aligned} w &= A\sin Mx\sin Ny \\ \psi_x &= B\cos Mx\sin Ny \\ \psi_y &= C\sin Mx\cos Ny \end{aligned}\right\} \qquad (9.3-26)$$

式中 A、B、C 是待定的常数. 将(9.3－26)式和(9.3 24)式代入方程(9.3－22). 先代入方程(9.3－22a)

$$\nabla^2 p = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(F\sin Mx\sin Ny)$$
$$= -FM^2\sin Mx\sin Ny - FN^2\sin Mx\sin Ny$$
$$= -F(M^2+N^2)\sin Mx\sin Ny \qquad (9.3-27a)$$

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)(A\sin Mx\sin Ny)$$
$$= A(M^2+N^2)^2\sin Mx\sin Ny \qquad (9.3-27b)$$

将(9.3－27a)、(9.3－27b)式代入(9.3－22a)得

$$A(M^2+N^2)^2\sin Mx\sin Ny = \left(\frac{1}{D} + \frac{M^2+N^2}{k^2Gh}\right)F\sin Mx\sin Ny$$

$$A = \frac{F}{D(M^2+N^2)^2} + \frac{F}{k^2Gh(M^2+N^2)} \qquad (9.3-28a)$$

再解方程(9.3－22b)的第一式 $\alpha=1$, 即 x 方向,

$$\left(\frac{h^2}{12k^2}\nabla^2 - 1\right)\left(D\nabla^4\psi_x + \frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0 \qquad (9.3-22b_1)$$

$$\nabla^4\psi_x = BM^4\cos Mx\sin Ny + 2BM^2N^2\cos Mx\sin Ny + BN^4\cos Mx\sin Ny$$
$$= B(M^2+N^2)^2\cos Mx\sin Ny \qquad (9.3-29a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = FM\cos Mx\sin Ny \qquad (9.3-29b)$$

$$D\nabla^4\psi_x + \frac{\partial p}{\partial x} = [DB(M^2+N^2)^2 + FM]\cos Mx\sin Ny$$
$$(9.3-29c)$$

$$\nabla^2\left(D\nabla^4\psi_x + \frac{\partial p}{\partial x}\right)$$
$$= -[DB(M^2+N^2)^2 + FM](M^2+N^2)\cos Mx\sin Ny$$
$$(9.3-29d)$$

将(9.3－29d)式及(9.3－29c)式代入方程(9.3－22b$_1$), 得

$$\frac{h^2}{12k^2}[DB(M^2+N^2)^2 + FM][-(M^2+N^2)]\cos Mx\sin Ny -$$
$$[DB(M^2+N^2)^2 + FM]\cos Mx\sin Ny = 0$$

$$-\frac{h^2}{12k^2}[DB(M^2+N^2)^3]-DB(M^2+N^2)^2$$

$$=\frac{h^2}{12k^2}(M^2+N^2)FM+FM$$

$$B=-\frac{FM}{D(M^2+N^2)^2} \tag{9.3-28b}$$

同理

$$C=-\frac{FN}{D(M^2+N^2)^2} \tag{9.3-28c}$$

(9.3-26)式及(9.3-28)式给出了所讨论的问题的解.

由于所讨论的板问题的线性性质,叠加原理是适用的.因此,上述解与双重傅里叶(Fourier)级数结合起来,可用于求解任意分布横向载荷作用下简支矩形板的解.若载荷为

$$p(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{mn}\sin Mx\sin Ny \tag{9.3-30}$$

则板的位移场为

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{D(M^2+N^2)}+\frac{1}{k^2Gh}\right)f_{mn}\frac{\sin Mx\sin Ny}{(M^2+N^2)} \tag{9.3-31a}$$

$$\psi_x=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{mn}M\cos Mx\sin Ny}{D(M^2+N^2)^2} \tag{9.3-31b}$$

$$\psi_y=-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{mn}N\sin Mx\cos Ny}{D(M^2+N^2)^2} \tag{9.3-31c}$$

式中 $M=\frac{m\pi}{a}$, $N=\frac{n\pi}{b}$, $m,n=1,2,3,\cdots$. 傅里叶系数 f_{mn} 由给定的分布载荷 $p(x,y)$ 决定.

§9.4 薄板理论

薄板理论是19世纪由热耳曼(Germain)、拉格朗日和柯西等人提出来的.现广泛应用于工程领域.本节对薄板理论的推导,是从§9.3出发,将中厚板(赖斯纳板)理论加以适当修正,即进一步假设:板变形前中面的直法线在板变形后仍保持为直线且垂直于变形后的中面.这便是薄板理论中著名的直法线假设.这个假设的意义是:略去板的横向剪变形.由

(9.3－7b),有

$$\varepsilon_{\alpha z}=\frac{1}{2}(\psi_\alpha+w_{,\alpha})=0$$

因此

$$\psi_\alpha=-w_{,\alpha} \tag{9.4-1}$$

将(9.4－1)式代入(9.3－9)式,则板的合应变－位移关系如下:

$$m_{\alpha\beta}=-w_{,\alpha\beta},\qquad q_\alpha\equiv 0 \tag{9.4-2}$$

将(9.4－2)式代入(9.3－15a)式,并应用(9.3－13)式,可得薄板理论的合应力－位移关系:

$$M_{\alpha\beta}=-D[(1-\nu)w_{,\alpha\beta}+\nu(\nabla^2 w)\delta_{\alpha\beta}] \tag{9.4-3a}$$

由(9.3－5b)式,

$$F_{S\alpha}=M_{\alpha\beta,\beta}=-D(\nabla^2 w)_{,\alpha} \tag{9.4-3b}$$

基于直法线假设,板被认为对剪变形是刚性的,因此(9.3－15b)给出:

$$q_\alpha=\lim_{k^2G\to\infty}\frac{F_{S\alpha}}{k^2Gh}=0$$

对(9.4－3b)求导数,得

$$F_{S\alpha,\alpha}=-D(\nabla^2 w)_{,\alpha\alpha}=-D\nabla^2(\nabla^2 w)=-D\nabla^4 w$$

这样,(9.3－5a)式可写成

$$D\nabla^4 w=p \tag{9.4-4}$$

式中∇^4是双调和算子.方程(9.4－4)是薄板理论以位移表示的平衡方程.求方程(9.4－4)的惟一解的充分条件是给出沿平板周界 C 的下列边界条件:

$$\left.\begin{aligned}&w\ \text{或}\ V_n=F_{Sn}+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\\&\text{及}\frac{\partial w}{\partial n}\text{或}M_{nn}\end{aligned}\right\} \tag{9.4-5}$$

F_{Sn}, M_{nn} 和 M_{ns} 的定义与§9.3 中(9.3－23)式相同,如图 9－6 所示.

若周界 C 的外法矢 $\boldsymbol{n}$ 在 C 上某点不连续,则在该点,对板的边界条件必须作特殊考虑.对于矩形板,有 4 个成直角的角点,在这种情况下,必须给定角点的 w 或 $M_{\alpha\beta}$.可以指出,$F=2M_{\alpha\beta}$ 等价于在板的角点上有一集中横向力作用.

必须指出:在历史发展上,薄板理论的建立早于中厚板理论.当时,薄板理论并不是从三维弹性理论基本方程推导出来的,而是从直法线假设出发推导出来的.本书之所以从三维弹性理论基本方程出发来推导薄板

(还有梁)的基本方程,其目的在于使读者了解,对于具体问题,如何从弹性力学基本方程出发,加以适当简化,以建立具体问题的近似理论,以便于工程应用.

薄板的基本方程可以用普遍张量表示,它们适用于任意曲线坐标系.

平衡方程: $D w|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = p$ (9.4-4)′

边界条件: $\left.\begin{array}{l}\text{给定 } w \text{ 或 } V_n = F_{Sn} + M_{ns}|_s \\ \text{给定 } w|_n \text{ 或 } M_{nn}\end{array}\right\}$ (9.4-5)′

$$\begin{aligned}\text{弯矩}:M^{\alpha\beta} &= M_\gamma^\beta g^{\alpha\gamma} = -D[(1-\nu)w|_\gamma^\beta + \nu w|_\lambda^\lambda \delta_\gamma^\beta]g^{\alpha\gamma} \\ &= -D[(1-\nu)w|^{\alpha\beta} + \nu w|_\lambda^\lambda g^{\alpha\beta}]\end{aligned} \quad (9.4-3a)'$$

剪力: $F_S^\alpha = M^{\alpha\beta}|_\beta = -D w|_{\beta\gamma}^\beta g^{\gamma\alpha}$ (9.4-3b)′

指标 $\alpha,\beta,\gamma,\lambda$ 的范围是 1、2.

例 一简支矩形板,长、宽分别为 a、b,如图 9-8 所示.板面受横向分布载荷

$$p(x,y) = F\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$m,n = 1,2,3,\cdots \quad (9.4-6)$$

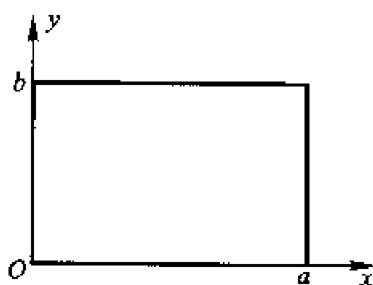


图 9-8

边界条件:

$$\left.\begin{array}{l} w(0,y) = M_{xx}(0,y) = 0 \\ w(x,0) = M_{yy}(x,0) = 0 \\ w(a,y) = M_{xx}(a,y) = 0 \\ w(x,b) = M_{yy}(x,b) = 0 \end{array}\right\} \quad (9.4-7)$$

设方程(9.4-4)的解取下式:

$$w = A\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (9.4-8)$$

式中 A 为待定常数.(9.4-8)式满足边界条件(9.4-7).将(9.4-6)式

及(9.4－8)式代入板的基本微分方程(9.4－4),可求出

$$A=\frac{F}{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2}$$

这样,本题的解为

$$w=\frac{F\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{D\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2}\qquad(9.4-9)$$

本题的解,也可以从解(9.3－26)式和(9.3－28)式得到,只需令 $k^2G\to\infty$,亦即在§9.3 的例题中,略去横向剪变形.对于承受任意分布载荷的板,它的位移场可在本题的解的基础上,用双重傅里叶级数的方法得出,正如§9.3 的例题所指出的那样.

习　题

1. 计算图 9－9 所示的等截面悬臂梁的挠度.梁承受均布载荷 p_0.作出梁的剪力图和弯矩图.

(a) 应用铁木辛柯梁理论;

(b) 应用欧拉－伯努利梁理论;

(c) 比较(a)和(b)的结果.

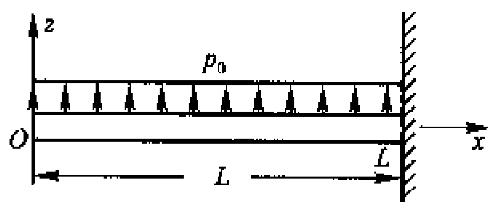


图 9－9

2. 一两端刚性固定的梁,在梁中点作用有集中力 F,如图 9－10 所示,计算梁的挠度.(a) 应用铁木辛柯梁理论,(b) 应用欧拉－伯努利梁理论,(c) 比较(a)和(b)的

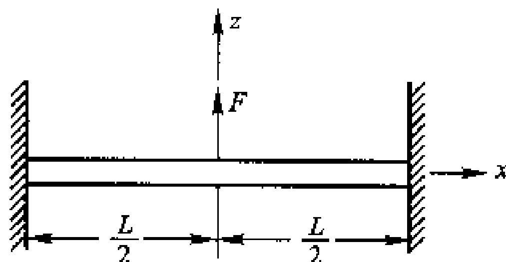


图 9－10

结果.

3. 从中厚板理论的应力平衡方程(9.3-5)的张量表示式出发,

$$\left.\begin{aligned} &F_S^\alpha|_\alpha + p = 0 \\ &M^{\alpha\beta}|_\beta - F_S^\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.3-5}$$

建立以平面极坐标(r,θ)表示的中厚板理论的应力平衡方程(以物理分量表示):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{Sr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F_{S\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{F_{Sr}}{r} + p = 0 \\ \dfrac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r} - F_{Sr} = 0 \\ \dfrac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{2M_{r\theta}}{r} - F_{S\theta} = 0 \end{cases}$$

4. 在平面极坐标系(r,θ)中,设位移场为

$$u_r = Z\psi_r(r,\theta),\quad u_\theta = Z\psi_\theta(r,\theta),\quad u_z = w(r,\theta)$$

从中厚板理论的应力-位移关系的张量表示式(9.3-16a)′

$$\begin{aligned} M_\beta^\alpha &= D[(1-\nu)m_\beta^\alpha + \nu m\delta_\beta^\alpha] \\ &= D\left[\frac{1-\nu}{2}(\psi^\alpha|_\beta + \psi_\beta|^\alpha) + \nu\psi^\gamma|_\gamma\delta_\beta^\alpha\right] \end{aligned} \tag{9.3-16a)'$$

出发,建立中厚板理论的应力-位移关系式(以物理分量表示):

$$M_{rr} = D\left[\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\left(\psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$M_{\theta\theta} = D\left[\nu\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\psi_r + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = \frac{D}{2}(1-\nu)\left(\frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\psi_\theta\right)$$

$$F_{Sr} = k^2 Gh\left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

$$F_{S\theta} = k^2 Gh\left(\psi_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$$

5. 将习题4的应力-位移关系式代入习题3中的应力平衡方程,导出极坐标系(r,θ)中的中厚板理论的位移平衡方程:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}D\left[(1-\nu)\left(\dfrac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \psi_r}{\partial \theta^2}\right) + (1+\nu)\left(\dfrac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi_r}{\partial r} - \right.\right. \\ \qquad \left.\left.\dfrac{\psi_r}{r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r\partial \theta} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta}\right)\right] - k^2 Gh\left(\psi_r + \dfrac{\partial w}{\partial r}\right) = 0 \\ \dfrac{1}{2}D\left[(1-\nu)\left(\dfrac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi_\theta}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2}\right) + (1+\nu)\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \psi_r}{\partial r\partial \theta} + \right.\right. \\ \qquad \left.\left.\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial \psi_r}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial \theta^2}\right)\right] - k^2 Gh\left(\psi_\theta + \partial\dfrac{\partial w}{r\partial \theta}\right) = 0 \\ k^2 Gh\left(\dfrac{\partial \psi_r}{\partial r} + \dfrac{\psi_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + p = 0 \end{cases}$$

6. 由习题4中的公式出发,导出平面极坐标系(r,θ)中的经典板理论的应力-

位移关系式(以物理分量表示):(提示:略去剪应变,即 $\varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}(\psi_\theta+w_{,\theta})=0$)

$$M_{rr}=-D\left[\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right]$$

$$M_{\theta\theta}=-D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)$$

$$M_{r\theta}=(1-\nu)D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}\right)$$

$$F_{Sr}=-D\frac{\partial}{\partial r}(\nabla^2 w)$$

$$F_{S\theta}=-D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2 w)$$

7. (a) 将中厚板理论的位移平衡方程(9.3－17)改写成普遍张量形式的方程.由此出发,略去剪应变(即认为 $\varepsilon_{\alpha z}=\frac{1}{2}(\psi_\alpha+w_{,\alpha})=0$),导出平面极坐标系中经典板理论的位移平衡方程.

(b) 将板的经典理论的位移平衡方程

$$D\nabla^4 w=p \tag{9.4－4}$$

展开成平面极坐标系中的薄板位移平衡方程,以检查本题(a)中得出的结果.

8. 一圆环形板刚性固定在 $r=a$ 和 $r=b$ 的内外边缘,如图 9－11 所示.集中力 F 作用在板中心的圆杆中心.计算板的位移、弯矩和剪力.(a) 应用中厚板理论,(b) 应用经典薄板理论,(c) 将(a)和(b)的计算结果加以比较.

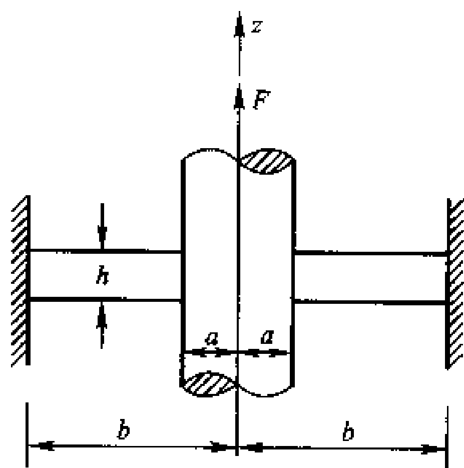


图　9－11

第十章 能量原理

弹性固体在外力作用下产生变形,外力作功.外力所作的功以能量的形式储存于物体内部;外力移去后,储存的能量使弹性体恢复原状,这种能量称为应变能(strain energy).利用应变能的概念,借助于能量原理,可以推导出此前所建立的全部弹性力学方程.能量原理还可用来推导杆、梁、板、壳等工程中常用构件的近似理论的基本方程和边界条件.能量原理还可用来建立求弹性力学边值问题近似解的方法.能量原理以标量形式表达,它提供了一种便于在各种曲线坐标系中推导弹性力学方程的工具.本章在建立应变能概念和梁、板等的应变能计算方法的基础上,讨论最小总势能原理、最小总余能原理以及赫林格－赖斯纳(Hellinger－Reissner)变分原理,并举例说明它们的应用.

§10.1 弹性体的应变能

在§6.1中已推导出应变能密度函数[(6.1－7)式]

$$W(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}E^{ijlm}\varepsilon_{lm}\varepsilon_{ij}$$

对于各向同性弹性体,弹性张量 E^{ijlm} 只有两个不等于0的独立分量,其表示式[(6.2－18)式]为

$$E^{ijlm}=\lambda g^{ij}g^{lm}+\mu(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl})$$

将(6.2－18)式代入(6.1－7)式,得

$$\begin{aligned}W(\varepsilon_{ij})&=\frac{1}{2}[\lambda g^{ij}g^{lm}+\mu(g^{il}g^{jm}+g^{im}g^{jl})]\varepsilon_{lm}\varepsilon_{ij}\\&=\frac{1}{2}[\lambda g^{ij}\varepsilon_m^m+2\mu\varepsilon^{ij}]\varepsilon_{ij}\\&=\frac{1}{2}[\lambda\varepsilon_m^m\varepsilon_i^i+2\mu\varepsilon^{ij}\varepsilon_{ij}]\end{aligned}\tag{10.1－1}$$

这是各向同性线弹性材料三维应变状态的应变能密度的表示式,它是应变张量的标量函数.应用(6.2－19)式,则(10.1－1)式可写成

$$W(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}\tag{10.1－2}$$

将 $W(\varepsilon_{ij})$[(10.1-1)式]对应变张量的分量求偏导数,可得出应力-应变关系式

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda g^{ij}\varepsilon_m^m + 2\mu\varepsilon^{ij} = \sigma^{ij} \tag{10.1-3}$$

由此可知,应力与应变必定同时消失.因此可以假设物体存在一个“自然状态”,在此状态下,物体内各点的应力张量、应变张量均为零.若以下标 0 表示自然状态,则由(10.1-3)式可得

$$(\sigma^{ij})_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_0 = 0 \tag{10.1-4}$$

由此可知:在自然状态,应变能密度函数有驻值.至于自然状态下 W_0 的值本身是无关紧要的,我们关心的是 W 的偏导数.因此,可以令

$$W_0 = 0 \tag{10.1-5}$$

由于拉梅常数 λ、μ 是正值(见(6.3-13)式),应变能密度 $W(\varepsilon_{ij})$[(10.1-1)式]是应变张量的正定函数.在§6.1 已指出,应变能密度等于单位体积的外力功,即单位体积的应变能,因此,整个物体的应变能 U 为

$$U = \int_V W \mathrm{d}V \tag{10.1-6}$$

§10.2 梁和板的应变能

一、梁的应变能

梁的应变能用合应变表示较为方便.将应变能密度 W 在梁的横截面上积分,可得梁单位长度的应变能 W_B

$$W_B = \int_A W \mathrm{d}A \tag{10.2-1}$$

整个梁的应变能 U 为

$$U = \int_0^L W_B \mathrm{d}x \tag{10.2-2}$$

对于铁木辛柯梁(图 9-1),假设位移为((9.1-3)式)

$$\left.\begin{aligned} u_x(x,y,z) &= z\psi(x) \\ u_y(x,y,z) &= v(x,y,z) \\ u_z(x,y,z) &= w(x) \end{aligned}\right\} \tag{10.2-3a}$$

梁的应变场为

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=z\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=zm(x)\\&\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad\varepsilon_{zz}=0\\&2\varepsilon_{xz}=\psi(x)+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=q(x)\\&2\varepsilon_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x},\quad2\varepsilon_{zy}=\frac{\partial v}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(10.2-3b)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}m(x)&=\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{I}\int_A z\varepsilon_{xx}\mathrm{d}A\\q(x)&=\psi+\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{A}\int_A(\varepsilon_{xz}+\varepsilon_{zx})\mathrm{d}A\end{aligned}\right\}\qquad(10.2-3c)$$

$m(x)$,$q(x)$可以看作是梁理论中的合应变.将梁的应变场代入(10.1-2)式,则:

$$2W=\sigma_{xx}zm(x)+\sigma_{xz}q(x)+\sigma_{yx}\frac{\partial v}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_{yz}\frac{\partial v}{\partial z}$$

由(10.2-1)式,得

$$2W_B=m(x)\int_A z\sigma_{xx}\mathrm{d}A+q(x)\int_A\sigma_{xz}\mathrm{d}A+\int_A\left(\sigma_{yx}\frac{\partial v}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_{yz}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}A$$

上式中的前两个积分分别是梁的弯矩 $M(x)$和剪力 $F_S(x)$,(见(9.1-2)式).借助格林定理,第三个积分可以转换成以下的表示式:

$$\begin{aligned}&\int_A\left(\sigma_{yx}\frac{\partial v}{\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma_{yz}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}A\\&=\int_A\left[\frac{\partial}{\partial x}(v\sigma_{yx})+\frac{\partial}{\partial y}(v\sigma_{yy})+\frac{\partial}{\partial z}(v\sigma_{yz})\right]\mathrm{d}A-\\&\quad\int_A v\left(\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}\right)\mathrm{d}A\\&=\oint_c v(\sigma_{yx}n_x+\sigma_{yy}n_y+\sigma_{yz}n_z)\mathrm{d}S-\\&\quad\int_A v\left(\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}\right)\mathrm{d}A\\&=\oint_c vP_y\mathrm{d}S+\int_A vF_y\mathrm{d}A\end{aligned}$$

上式中最后的等式分别应用了物体表面平衡方程(4.2－7)和物体内部平衡方程(4.2－6)式．在梁理论中，略去体力，则 $F_y=0$；在梁的侧表面(图9－1)，表面力矢量没有 y 方向的分量，因此在 C 上，$P_y=0$．这样，可得到以下的结果

$$2W_B=m(x)M(x)+q(x)F_S(x) \qquad (10.2-4a)$$

应用合应力与合应变的关系式(9.1－5)，可得

$$W_B=\frac{1}{2}(EIm^2+k^2AGq^2) \qquad (10.2-4b)$$

上式中 W_B 是由合应变 m 和 q 所定义，W_B 是合应力(弯矩、剪力)的势函数，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W_B}{\partial m}&=EIm=M\\ \frac{\partial W_B}{\partial q}&=k^2AGq=F_S\end{aligned}\right\} \qquad (10.2-4c)$$

对于欧拉－伯努利梁，$\psi=-\dfrac{dw}{dx}$，因此 $q=0$，$m=-\dfrac{d^2w}{dx^2}$，这样，

$$W_B=\frac{1}{2}mM=\frac{1}{2}EIm^2 \qquad (10.2-5)$$

二、板的应变能

对于板，可以定义单位平板面积的应变能 W_P 为

$$W_P=\int_{-h/2}^{h/2}W\,dz \qquad (10.2-6a)$$

整个板的应变能 U 为

$$U=\int_A W_P\,dA \qquad (10.2-6b)$$

式中，A 为板中面的面积．读者可作为练习证明，对于中厚板，

$$\begin{aligned}W_P&=\frac{1}{2}(M^{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}+F_S^{\alpha}q_{\alpha})\\ &=\frac{1}{2}D[\nu m^2+(1-\nu)m^{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}]+\frac{1}{2}k^2Ghq^{\alpha}q_{\alpha}\end{aligned} \qquad (10.2-7)$$

上式中的符号见§9.3．由(10.2－7)式可以看出，W_P 由合应变表示．W_P 是合应力(弯矩/扭矩、剪力)的势函数，因此

$$\left.\begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= \frac{\partial W_P}{\partial m_{\alpha\beta}} = D[(1-\nu)m^{\alpha\beta} + \nu m g^{\alpha\beta}] \\ F_S^{\alpha} &= \frac{\partial W_P}{\partial q^{\alpha}} = k^2 G h q^{\alpha} \end{aligned}\right\} \qquad (10.2-8)$$

对于薄板，

$$\begin{aligned} W_P &= \frac{1}{2} M^{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} D[(1-\nu) w|^{\alpha\beta} + \nu w|_{\lambda}^{\lambda} g^{\alpha\beta}](-w|_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} D[(1-\nu) w|^{\alpha\beta} w|_{\alpha\beta} + \nu w|_{\lambda}^{\lambda} w|_{\beta}^{\beta}] \end{aligned} \qquad (10.2-9)$$

(10.2-8)和(10.2-9)式中求和指标 α,β,λ 的范围为 1、2，见 § 9.3. 对于矩形薄板，

$$\begin{aligned} W_P &= \frac{D}{2}\left\{(1-\nu)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right] + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} \\ &= \frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \end{aligned} \qquad (10.2-10)$$

§ 10.3 虚 功 原 理

一弹性物体，在给定的体力 F^i（在域 B 内）和表面力 P^{i*}（在界面 S_1 上）以及给定的位移 u_i^*（在界面 S_2 上）等条件下，处于平衡状态，由下列方程描述：

$$\sigma^{ij}|_j + F^i = 0 \qquad 在域 B 内 \qquad (10.3-1a)$$

$$\sigma^{ij} n_j = P^{i*} \qquad 在 S_1 上 \qquad (10.3-1b)$$

$$u_i = u_i^* \qquad 在 S_2 上 \qquad (10.3-1c)$$

设物体离开平衡位置有一微小的虚位移 δu_i，虚位移是任意的，但不能违背运动学边界条件，即

$$\delta u_i = 0, \qquad 在 S_2 上 \qquad (10.3-2)$$

根据虚功原理，由(10.3－1a)及(10.3－1b)式可以写出：

$$-\int_B (\sigma^{ij}|_j + F^i)\delta u_i \mathrm{d}V + \int_{S_1} (\sigma^{ij} n_j - P^{i*})\delta u_i \mathrm{d}S = 0 \tag{10.3-3}$$

应用高斯定理(3.7－2)及(10.3－2)式，可以证明

$$-\int_B \sigma^{ij}|_j \delta u_i \mathrm{d}V = -\int_B (\sigma^{ij}\delta u_i)|_j \mathrm{d}V + \int_B \sigma^{ij}\delta u_i|_j \mathrm{d}V$$
$$= -\int_{S_1} (\sigma^{ij}\delta u_i) n_j \mathrm{d}S + \int_B \sigma^{ij}\delta u_i|_j \mathrm{d}V$$

而

$$\sigma^{ij}\delta u_i|_j = \sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} = \delta W$$

这样，(10.3－3)式可以写成如下的形式：

$$\delta U = \int_B F^i \delta u_i \mathrm{d}V + \int_{S_1} P^{i*} \delta u_i \mathrm{d}S \tag{10.3-4}$$

式中

$$\delta U = \int_B \delta W \mathrm{d}V \tag{10.3-5}$$

(10.3－4)式表示：外力对虚位移所作的功等于物体应变能的相应变化.

若外力是保守力，则力的大小和方向不因物体的变形而改变. 这样(10.3－4)式可以写成

$$\delta\left\{\int_B [W(\varepsilon_{ij}) - F^i u_i]\mathrm{d}V - \int_{S_1} P^{i*} u_i \mathrm{d}S\right\} = 0 \tag{10.3-6}$$

令

$$E = \int_B [W(\varepsilon_{ij}) - F^i u_i]\mathrm{d}V - \int_{S_1} P^{i*} u_i \mathrm{d}S \tag{10.3-7}$$

E 称为系统的总势能，它包括弹性体的应变势能和外力(体力 F^i 和表面力 P^{i*})的势能. 这样，(10.3－6)式可写成

$$\delta E = 0 \tag{10.3-8}$$

上式表明：对于离开平衡位置的任意虚位移，系统总势能的变化等于 0. 也就是说，弹性体在外力作用下处于平衡状态，在平衡位置，弹性系统的总势能有驻值.

§ 10.4　最小总势能原理

在 § 10.3 中指出，在平衡位置，弹性系统的总势能有驻值. 可以进一步证明：在平衡位置，弹性系统的总势能有极小值. 现证明如下.

设 u_i 为弹性物体在外力(体力 F^i 和表面力 P^{i^*})作用下的平衡位置的位移场，相应的总势能为

$$E(u_i) = \int_B [W(\varepsilon_{ij}) - F^i u_i] \mathrm{d}V - \int_{S_1} P^{i^*} u_i \mathrm{d}S \tag{10.4-1}$$

设物体有虚位移 δu_i，则在新的位置($u_i + \delta u_i$)有

$$E(u_i + \delta u_i) = \int_B [W(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) \quad F^i(u_i + \delta u_i)] \mathrm{d}V - \int_{S_1} P^{i^*}(u_i + \delta u_i) \mathrm{d}S \tag{10.4-2}$$

这两个位置的总势能之差为

$$E(u_i + \delta u_i) - E(u_i) = \int_B [W(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) - W(\varepsilon_{ij})] \mathrm{d}V - \int_B F^i \delta u_i \mathrm{d}V - \int_{S_1} P^{i^*} \delta u_i \mathrm{d}S$$

$W(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij})$可以用 Taylor 级数展开

$$W(\varepsilon_{ij} + \delta\varepsilon_{ij}) - W(\varepsilon_{ij}) = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} + \cdots$$
$$= \delta W + \delta^2 W + \cdots$$

这样，

$$E(u_i + \delta u_i) - E(u_i) = \delta E + \delta^2 E + \cdots \tag{10.4-3}$$

式中，

$$\delta E = \int_B \delta W \mathrm{d}V - \int_B F^i \delta u_i \mathrm{d}V \quad \int_{S_1} P^{i^*} \delta u_i \mathrm{d}S \tag{10.4-4}$$

$$\delta^2 E = \int_B \delta^2 W \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_B \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \delta\varepsilon_{ij} \delta\varepsilon_{kl} \mathrm{d}V \tag{10.4-5}$$

由于虚位移是从物体的平衡位置出发，在平衡位置，$\delta E = 0$，[(10.3-8)式]. 因此，对于微小的虚位移，(10.4-3)式可以近似地表示为：

$$E(u_i+\delta u_i)-E(u_i)=\delta^2 E \tag{10.4-6}$$

总势能 E 为极小值的条件是

$$\delta E=0 \tag{10.3-8}$$

和

$$\delta^2 E\geqslant 0 \tag{10.4-7}$$

对于线弹性物体，由(10.1－2)式及(6.1－1)式，

$$W(\varepsilon_{ij})=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}E^{ijkl}\varepsilon_{kl}\varepsilon_{ij}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}=E^{ijkl}$$

因此，(10.4－5)式成为

$$\delta^2 E=\int_B\frac{1}{2}E^{ijkl}\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}\mathrm{d}V=\int_B W(\delta\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V\geqslant 0 \tag{10.4-8}$$

这是因为在§10.1已指出，应变能密度 W 是应变张量的正定函数．由(10.3－8)和(10.4－8)式，系统的总势能 E 有极小值得到证明．因此，$\delta E=0$(10.3－8)称为最小总势能原理．对于弹性保守系统，最小总势能原理和虚功原理是等价的．

由§10.3和§10.4的推导可以看出：最小总势能原理实质上等价于弹性体的平衡方程，包含物体内部及表面邻近的平衡方程．

§10.5 最小总势能原理的应用

最小总势能原理可以用来推导弹性物体的平衡方程及其相关的边界条件，如直杆的扭转，梁、板、壳和层板壳的弯曲等．应用最小总势能原理时，根据物体的几何形状和载荷特点，可以先对位移场的形式作某些假设，然后由相应的应变场来计算物体的应变能，以便于最小总势能原理的应用．下面列举一些典型例题，说明最小总势能原理的应用．

一、棱柱杆的扭转

今应用最小总势能原理推导棱柱杆扭转的平衡方程和相应的边界条件．杆长 L，等截面 A，受扭矩 T 作用．采用直角坐标系，如图10－1．

假设位移场((8.3－1)式)

$$\left.\begin{aligned}u_x&=-\beta yz\\u_y&=\beta zx\\u_z&=\beta\phi(x,y)\end{aligned}\right\} \tag{10.5-1}$$

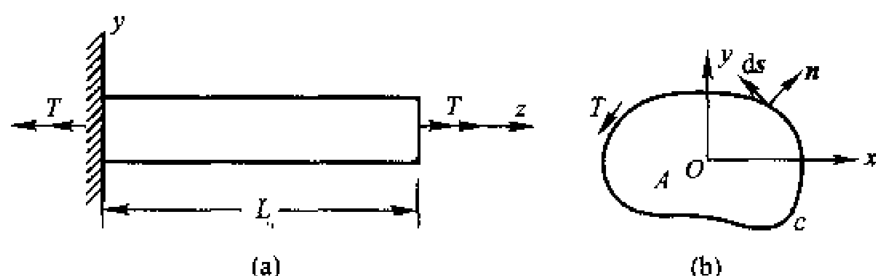


图 10-1

式中,β 为单位长度的扭转角,$\phi(x,y)$ 为翘曲函数. 相应于位移场(10.5-1)的应变场为

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{xy}=0\\&2\varepsilon_{xz}=\gamma_{xz}=\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right)\\&2\varepsilon_{yz}=\gamma_{yz}=\beta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)\end{aligned}\right\}\tag{10.5-2}$$

根据(10.1-2)式可得出

$$W=\frac{1}{2}G(\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2)\tag{10.5-3}$$

这样,

$$\begin{aligned}\delta W&=G(\gamma_{xz}\delta\gamma_{xz}+\gamma_{yz}\delta\gamma_{yz})\\&=\beta^2G\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right)\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\right]\\&=\beta^2G\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right)\delta\phi\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)\delta\phi\right]-(\nabla^2\phi)\delta\phi\right\}\end{aligned}$$

式中

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\tag{10.5-4}$$

将以上结果代入(10.3-5)式,然后应用格林定理,可得

$$\begin{aligned}\delta U=L\int_A\delta W\mathrm{d}A=&-\beta^2GL\int_A(\nabla^2\phi)\delta\phi\mathrm{d}A+\\&\beta^2GL\oint_c\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right)n_x+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)n_y\right]\delta\phi\mathrm{d}s\end{aligned}\tag{10.5-5}$$

对于棱柱杆扭转问题,可略去体力的作用,即认为 $F^*=0$,并且在杆的侧表面上,表面力 $P^{s*}=0$;在杆的端部,$P^{z*}=0$,且由于(10.5-1)式,δu_z

$=\delta u_y=0$. 因此，在棱柱杆的整个表面，$P^{\nu}\ \delta u_i=0$. 这样，(10.3－8)式变成

$$\delta E=\delta U=0 \tag{10.5-6}$$

由于截面形状 A 是任意的，在截面 A 内 $\delta\phi$ 是任意的，则将(10.5－5)式代入(10.5－6)式，得出以下结果：

$$\nabla^2\phi=0 \qquad \text{在域 } A \text{ 内} \tag{10.5-7a}$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-y\right)n_x+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+x\right)n_y=0 \quad \text{在 } c \text{ 上} \tag{10.5-7b}$$

这样，应用最小总势能原理，推导出了平衡方程(10.5－7a)和相关的边界条件(10.5－7b)，它们与§8.3 的结果是一致的. 扭转角 β 可利用§8.3 的分析方法决定

$$\beta=\frac{T}{D} \tag{10.5-8a}$$

式中，T 是给定的杆端扭矩，D 为棱柱杆的扭转刚度：

$$D=G\int_A\left[\left(x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(y-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}A>0 \tag{10.5-8b}$$

二、铁木辛柯梁(图 9－1)

今应用最小总势能原理推导铁木辛柯梁的平衡方程和相应的边界条件(参见§9.1). 由于(10.2－4b)和(10.2－4c)式，

$$\begin{aligned}\delta W_B&=\frac{\partial W_B}{\partial m}\delta m+\frac{\partial W_B}{\partial q}\delta q\\&=M\delta m+F_S\delta q\end{aligned} \tag{10.5-9}$$

将应变－位移关系式(10.2－3c)式代入(10.5－9)式，得出

$$\begin{aligned}\delta W_B&=M\frac{\mathrm{d}\delta\psi}{\mathrm{d}x}+F_S\left(\delta\psi+\frac{\mathrm{d}\delta w}{\mathrm{d}x}\right)\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(M\delta\psi+F_S\delta w)-\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x}\delta w-\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}-F_S\right)\delta\psi\end{aligned} \tag{10.5-10}$$

再将(10.5－10)式代入(10.2－2)式，可得出以下应变能的变分表示式：

$$\begin{aligned}\delta U&=\int_0^L\delta W_B\,\mathrm{d}x\\&=[M\delta\psi+F_S\delta w]_0^L-\int_0^L\left[\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}-F_S\right)\delta\psi+\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x}\delta w\right]\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{10.5-11}$$

作用在梁上的表面力是:在梁的侧表面上有垂直方向的表面力 P^{z^*},在梁的两端 $x=0,L$ 有轴向及横向表面力 P^{x^*} 及 P^{z^*}.这样,表面力所作的功可计算如下:

$$\int_{S_t} P_i^* \delta u_i \mathrm{d}S = \int_0^L \oint_c P^{z^*} \delta w \mathrm{d}s \mathrm{d}x + \left[\int_A (P^{x^*} z\delta\psi + P^{z^*} \delta w)\mathrm{d}A\right]_{x=0} +$$

$$\left[\int_A (P^{x^*} z\delta\psi + P^{z^*} \delta w)\mathrm{d}A\right]_{x=L}$$

$$= \int_0^L p(x)\delta w \mathrm{d}x + [M^* \delta\psi + F_S^* \delta w]_0^L \quad (10.5-12)$$

式中

$$p(x) = \oint_c P^{z^*} \mathrm{d}s \qquad (10.5-13a)$$

$$M^*(L) = \int_A zP^{x^*}(L,y,z)\mathrm{d}A \qquad (10.5-13b)$$

$$M^*(0) = -\int_A zP^{x^*}(0,y,z)\mathrm{d}A \qquad (10.5-13c)$$

$$F_S^*(L) = \int_A P^{z^*}(L,y,z)\mathrm{d}A \qquad (10.5-13d)$$

$$F_S^*(0) = -\int_A P^{z^*}(0,y,z)\mathrm{d}A \qquad (10.5-13e)$$

以上各量见图 10-2.将(10.5-11)及(10.5-12)式代入(10.3-8)式,得出

$$\delta E = -\int_0^L \left[\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} - F_S\right)\delta\psi + \left(\frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x} + p\right)\delta w\right]\mathrm{d}x +$$

$$[(M - M^*)\delta\psi + (F_S - F_S^*)\delta w]_0^L = 0 \quad (10.5-14)$$

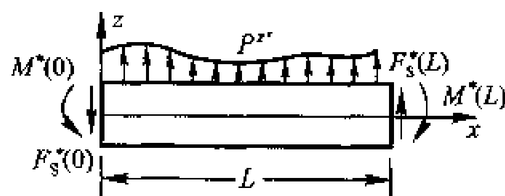


图 10-2

由于梁的跨长(0,L)是任意的,$\delta\psi$ 和 δw 在梁的跨长内是彼此独立的且是任意的,由此可得出:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}-F_S=0\\ \frac{\mathrm{d}F_S}{\mathrm{d}x}+p=0\end{aligned}\right\}\quad 0<x<L \tag{10.5-15}$$

在 $x=0$ 和 $x=L$ 处,

$$\left.\begin{aligned}M=M^* \text{ 或 } \delta\psi=0\\ F_S=F_S^* \text{ 或 } \delta w=0\end{aligned}\right\} \tag{10.5-16}$$

应用最小总势能原理,推导出铁木辛柯梁的平衡方程和相关的边界条件,但它们是用合应力 M、F_S 表示的.只需将(9.1-5)式代入(10.5-15)式,即可将平衡方程用位移 ψ、w 表示,如(9.1-9)式.

三、薄板理论

今应用最小总势能原理推导矩形薄板(图 10-3)的平衡方程和相应的边界条件.采用直角坐标系.在薄板理论中,不考虑剪变形,这样(10.2-7)及(10.2-8)式给出:

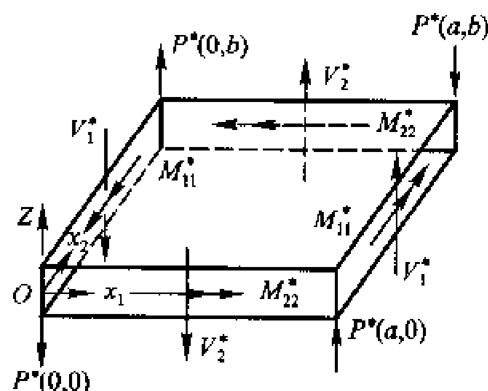


图 10-3

$$\begin{aligned}\delta W_P&=\frac{\partial W_P}{\partial m_{\alpha\beta}}\delta m_{\alpha\beta}\\&=M_{\alpha\beta}\delta m_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

由(9.4-2)式,

$$\delta W_P=-M_{\alpha\beta}\delta w_{,\alpha\beta}$$

$$\delta U=-\int_A M_{\alpha\beta}\delta w_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A \tag{10.5-17}$$

对(10.5-17)式连续二次应用分部积分公式(见附录,采用直角坐标张量),得

$$\delta U = -\int_A M_{\alpha\beta,\beta\alpha}\delta w \mathrm{d}A - 2[(M_{12}\delta w)_0^a]_0^b - \int_0^b [M_{11}\delta w_{,1} - (M_{11,1} + 2M_{12,2})\delta w]_0^a \mathrm{d}x_2 - \int_0^a [M_{22}\delta w_{,2} - (M_{22,2} + 2M_{21,1})\delta w]_0^b \mathrm{d}x_1 \tag{10.5-18}$$

作用的外力包括沿板边作用的弯矩(M_{11}^*, M_{22}^*)和垂向力(V_1^*, V_2^*),以及作用在板面的分布的横向载荷 $p(x_1, x_2)$和作用在板的四角的垂向角力 P^*,如图 10 3 所示.这样,

$$\int_{S_1} P_i^* \delta u_i \mathrm{d}S = \int_A p(x_1, x_2)\delta w \mathrm{d}A + \int_0^b [V_1^* \delta w - M_{11}^* \delta w_{,1}]_0^a \mathrm{d}x_2 + \int_0^a [V_2^* \delta w - M_{22}^* \delta w_{,2}]_0^b \mathrm{d}x_1 - [(P^* \delta w)_0^a]_0^b \tag{10.5-19}$$

由于 δw 在域 A 内是任意的,将(10.5-18)及(10.5-19)式代入(10.3-4)式,略去体力 F^i,可得出:

$$M_{\alpha\beta,\beta\alpha} + p = 0 \qquad \text{在域 } A \text{ 内} \tag{10.5-19a}$$

$$M_{11} = M_{11}^*,\text{或 } \delta w_{,1} = 0 \qquad \text{沿板边} \tag{10.5-19b}$$

$$M_{11,1} + 2M_{12,2} = V_1^*,\text{或 } \delta w = 0 \qquad x_1 = 0, x_1 = a \tag{10.5-19c}$$

$$M_{22} = M_{22}^*,\text{或 } \delta w_{,2} = 0 \qquad \text{沿板边} \tag{10.5-19d}$$

$$M_{22,2} + 2M_{21,1} = V_2^*,\text{或 } \delta w = 0 \qquad x_2 = 0, x_2 = b \tag{10.5-19e}$$

$$2M_{12} = P^* \text{ 或 } \delta w = 0 \quad \text{在板的四角}\{(0,0),(0,b),(a,0),(a,b)\} \tag{10.5-19f}$$

可以看出,在本例题的推导中,板的四角有力出现是自然的.

注 公式(10.5-18)的推导

$$\delta U = -\int_A M_{\alpha\beta}\delta w_{,\alpha\beta} \mathrm{d}A$$

$$= -\int_A \left[M_{11}\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x_1 \partial x_1} + M_{12}\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x_1 \partial x_2} + M_{21}\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x_2 \partial x_1} + M_{22}\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x_2 \partial x_2}\right]\mathrm{d}A$$

$$\int_A M_{11}\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x_1 \partial x_1}\mathrm{d}A$$

$$= \int_0^b \left[M_{11} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_1} \right]_0^a \mathrm{d}x_2 - \int_A M_{11,1} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_1} \mathrm{d}A$$

$$= \int_0^b \left[M_{11} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_1} \right]_0^a \mathrm{d}x_2 - \int_0^b [M_{11,1} \delta w]_0^a \mathrm{d}x_2 +$$

$$\int_A M_{11,11} \delta w \mathrm{d}A$$

$$\int_A M_{12} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x_1 \partial x_2} \mathrm{d}A$$

$$= \int_0^b \left[M_{12} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_2} \right]_0^a \mathrm{d}x_2 - \int_A M_{12,1} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_2} \mathrm{d}A$$

$$= [(M_{12} \delta w)_0^a]_0^b - \int_0^b [M_{12,2} \delta w]_0^a \mathrm{d}x_2 -$$

$$\int_0^a [M_{12,1} \delta w]_0^b \mathrm{d}x_1 + \int_A M_{12,12} \delta w \mathrm{d}A$$

$$\int_A M_{21} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x_2 \partial x_1} \mathrm{d}A$$

$$= \int_0^a \left[M_{21} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_1} \right]_0^b \mathrm{d}x_1 - \int_A M_{21,2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_1} \mathrm{d}A$$

$$= [[M_{21} \delta w]_0^b]_0^a - \int_0^a [M_{21,1} \delta w]_0^b \mathrm{d}x_1 -$$

$$\int_0^b [M_{21,2} \delta w]_0^a \mathrm{d}x_2 + \int_A M_{21,21} \delta w \mathrm{d}A$$

$$\int_A M_{22} \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x_2 \partial x_2} \mathrm{d}A$$

$$= \int_0^a \left[M_{22} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_2} \right]_0^b \mathrm{d}x_1 - \int_A M_{22,2} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_2} \mathrm{d}A$$

$$= \int_0^a \left[M_{22} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x_2} \right]_0^b \mathrm{d}x_1 -$$

$$\int_0^a [M_{22,2} \delta w]_0^b \mathrm{d}x_1 + \int_A M_{22,22} \delta w \mathrm{d}A$$

所以

$$\delta U = -\int_A M_{\alpha\beta,\beta\alpha} \delta w \mathrm{d}A - 2[(M_{12} \delta w)_0^a]_0^b -$$

$$\int_0^b [(M_{11} \delta w_{,1} - (M_{11,1} + 2M_{12,2}) \delta w]_0^a \mathrm{d}x_2 -$$

$$\int_0^a [M_{22}\delta w_{,2} - (M_{22,2} + 2M_{12,1})\delta w]_0^b \mathrm{d}x_1 \tag{10.5-18}$$

§ 10.6 余能概念

由(10.1－2)式，对于线弹性材料的直杆，在拉伸或压缩时单位体积的应变能(应变能密度)为

$$W(\varepsilon_{xx}) = \frac{1}{2}E\varepsilon_{xx}^2 \tag{10.6-1}$$

W 是材料应力－应变曲线下的面积．应力－应变曲线上部的面积 W^*(图 10－4)定义为余应变能密度，它总是以应力 σ_{xx} 表示

$$W^* = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} - W = \sigma_{xx}\left(\frac{\sigma_{xx}}{E}\right) - \frac{1}{2}E\left(\frac{\sigma_{xx}}{E}\right)^2 = \frac{1}{2E}\sigma_{xx}^2 \tag{10.6-2}$$

值得注意的是：W^* 是应变的势函数，即

$$\frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{xx}} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} = \varepsilon_{xx} \tag{10.6-3}$$

在线弹性情况下

$$W^* = \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} = W \tag{10.6-4}$$

这表明在线弹性情况下，对于任意应力(或应变)值，余应变能密度的值与应变能密度的值相等．这可以从图 10－4 看出来．但是，必须注意：余应变能密度总是表示成应力的函数，而应变能密度总是表示成应变的函数．

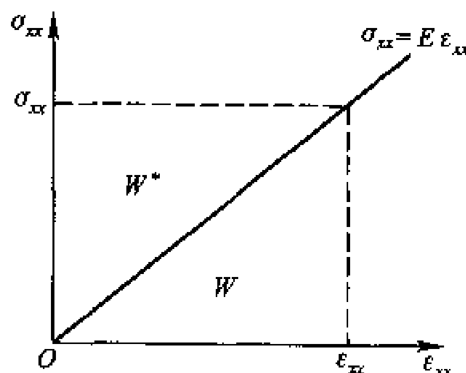


图 10－4

对于非线弹性材料，应力－应变关系为曲线，如图 10－5 所示．应变

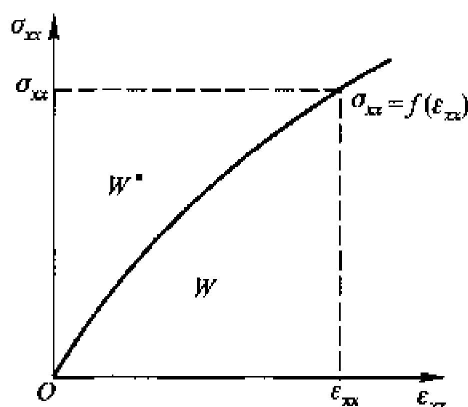


图 10-5

能密度 W 仍由应力-应变曲线下的面积表示，而余应变能密度 W^* 则由应力-应变曲线上方相应的面积表示.这样，

$$W^*(\sigma_{xx})=\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}-W(\varepsilon_{xx}) \tag{10.6-5}$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{xx}}=\varepsilon_{xx}+\sigma_{xx}\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \sigma_{xx}}-\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{xx}}\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial \sigma_{xx}}=\varepsilon_{xx} \tag{10.6-6}$$

由此可知，在非线弹性情况下，W^* 仍然是应变的势函数，但在这种情况下，W^* 与 W 的值不相等.

余应变能的概念可以推广到三维应力状态.这时

$$W^*(\sigma^{11},\sigma^{12},\cdots,\sigma^{33})=\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}-W(\varepsilon_{11},\varepsilon_{12},\cdots,\varepsilon_{33}) \tag{10.6-7a}$$

$$\frac{\partial W^*}{\partial \sigma^{ij}}=\varepsilon_{ij}+\sigma^{kl}\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma^{ij}}-\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kl}}\frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma^{ij}}=\varepsilon_{ij} \tag{10.6-7b}$$

在线性、各向同性弹性材料

$$W^*=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2G}\sigma^{ij}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_i^i\sigma_j^j\right)$$

$$=\frac{1}{2E}[(1+\nu)\sigma^{ij}\sigma_{ij}-\nu\sigma_i^i\sigma_j^j] \tag{10.6-8}$$

这样

$$\frac{\partial W^*}{\partial \sigma^{ij}}=\frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_{ij}-\nu\sigma_m^m g_{ij}]=\varepsilon_{ij} \tag{10.6-9}$$

由(10.6-8)式出发，可以证明，W^* 是应力张量分量的正定函数.

与§10.2类似，梁和板的余应变能可以由(10.6-7a)式推导出来.例如，铁木辛柯梁单位梁长的余应变能(见(10.2-4)式)为

$$W_B^*=Mm+F_Sq-W_B=\frac{1}{2}(Mm+F_Sq)=W_B$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{M^2}{EI} + \frac{F_S{}^2}{k^2 GA}\right\} \tag{10.6-10}$$

且

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W_B^*}{\partial M} &= \frac{M}{EI} = m \\ \frac{\partial W_B^*}{\partial F_S} &= \frac{F_S}{k^2 GA} = q \end{aligned}\right\} \tag{10.6-11}$$

读者可作为练习,自己推导中厚板单位板面余应变能的表示式.

§10.7 余虚功原理

余虚功原理与§10.3讨论的虚功原理是互补的.设位移场 u_i 满足应变位移关系

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i) = 0 \quad 在域 B 内 \tag{10.7-1}$$

以及位移边界条件

$$u_i - u_i^* = 0 \qquad 在 S_2 上 \tag{10.7-2}$$

相应的应力场满足平衡条件(10.3 1a)、(10.3-1b).设应力有虚变化 $\delta\sigma^{ij}$ 但不违背平衡条件(10.3-1),即

$$\left.\begin{aligned} (\delta\sigma^{ij})|_j &= 0 \qquad 在域 B 内 \\ \delta P^i = (\delta\sigma^{ij})n_j &= 0 \qquad 在 S_1 上 \end{aligned}\right\} \tag{10.7-3}$$

由(10.7-1)和(10.7-2)式,可以写出下面的方程

$$\int_B \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i)\right]\delta\sigma^{ij}\,\mathrm{d}V + \int_{S_2}(u_i - u_i^*)\delta P^i\,\mathrm{d}S = 0 \tag{10.7-4}$$

由于应力张量的对称性,并由于(10.7-3)式,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i)\delta\sigma^{ij} &= u_i|_j\delta\sigma^{ij} = (u_i\delta\sigma^{ij})|_j - u_i(\delta\sigma^{ij})|_j \\ &= (u_i\delta\sigma^{ij})|_j \end{aligned}$$

应用散度定理于上式

$$\int_B (u_i\delta\sigma^{ij})|_j\,\mathrm{d}V = \int_S u_i\delta\sigma^{ij}n_j\,\mathrm{d}S = \int_S u_i\delta P^i\,\mathrm{d}S = \int_{S_2} u_i^*\delta P^i\,\mathrm{d}S$$

这样,方程(10.7-4)可写成以下形式

$$\int_B \varepsilon_{ij}\delta\sigma^{ij}\,\mathrm{d}V - \int_{S_2} u_i^*\delta P^i\,\mathrm{d}S = 0 \qquad (10.7-5)$$

但是，由于(10.6－7b)式

$$\varepsilon_{ij}\delta\sigma^{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial\sigma^{ij}}\delta\sigma^{ij} = \delta W^* \qquad (10.7-6)$$

因此，余虚功原理可表述如下式：

$$\delta U^* = \int_{S_2} u_i^*\delta P^i\,\mathrm{d}S \qquad (10.7-7)$$

式中

$$U^* = \int_B W^*\,\mathrm{d}V \qquad (10.7-8)$$

U^*是物体的余应变能．这样，余虚功原理可以表述如下：由于应力场的虚变化而引起的余应变能的变化，等于表面力矢量的虚变化对于S_2上的位移u_i^*所作的功．若u_i^*的大小和方向是不变的，则可以定义系统的总余能为

$$E^* = U^* - \int_{S_2} u_i^* P^i\,\mathrm{d}S \qquad (10.7-9)$$

因此，(10.7－7)式可以表示成一个变分原理：

$$\delta E^* = 0 \qquad (10.7-10)$$

即：在满足平衡方程(10.3－1a)和表面力边界条件(10.3－1b)的所有可能的应力场中，满足运动学边界条件并产生协调的应变场的那个应力场使得系统的总余能有驻值．可以进一步证明，系统的总余能有极小值．

§ 10.8 最小总余能原理

弹性体在静力平衡状态下，系统的总余能E^*有极小值．现证明如下．设有一应力场σ^{ij}满足平衡方程(10.3－1)，相应的总余能为

$$E^*(\sigma^{ij}) = \int_B W^*(\sigma^{ij})\,\mathrm{d}V - \int_{S_2} u_i^* P^i\,\mathrm{d}S \qquad (10.8-1)$$

若应力有满足(10.7－3)的虚变化，则在新的应力场$(\sigma^{ij}+\delta\sigma^{ij})$，有

$$E^*(\sigma^{ij}+\delta\sigma^{ij}) = \int_B W^*(\sigma^{ij}+\delta\sigma^{ij})\,\mathrm{d}V - \int_{S_2} u_i^*(P^i+\delta P^i)\,\mathrm{d}S \qquad (10.8-2)$$

这两个状态的总余能之差为

$$E^*(\sigma^{ij}+\delta\sigma^{ij})-E^*(\sigma^{ij})=\int_B[W^*(\sigma^{ij}+\delta\sigma^{ij})-W^*(\sigma^{ij})]\mathrm{d}V-\int_{S_2}u_i^*\delta P^i\mathrm{d}S \tag{10.8-3}$$

应用 Taylor 级数展开,可写出:

$$W^*(\sigma^{ij}+\delta\sigma^{ij})-W^*(\sigma^{ij})=\frac{\partial W^*}{\partial\sigma^{ij}}\delta\sigma^{ij}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W^*}{\partial\sigma^{ij}\partial\sigma^{kl}}\delta\sigma^{ij}\delta\sigma^{kl}+\cdots$$
$$=\delta W^*+\delta^2 W^*+\cdots \tag{10.8-4}$$

这样

$$E^*(\sigma^{ij}+\delta\sigma^{ij})-E^*(\sigma^{ij})=\delta E^*+\delta^2 E^*+\cdots \tag{10.8-5a}$$

式中

$$\delta E^*=\int_B\delta W^*\mathrm{d}V-\int_{S_2}u_i^*\delta P^i\mathrm{d}S \tag{10.8-5b}$$

$$\delta^2 E^*=\int_B\delta^2 W^*\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_B\frac{\partial^2 W^*}{\partial\sigma^{ij}\partial\sigma^{kl}}\delta\sigma^{ij}\delta\sigma^{kl}\mathrm{d}V \tag{10.8-5c}$$

若相应于初始平衡状态的应变场是相容的,即满足方程(5.4-3),则由§10.7的讨论可知 $\delta E^*=0$(10.7-10).这样,对于应力场的微小的变化,(10.8-5)式成为:

$$E^*(\sigma^{ij}+\delta\sigma^{ij})-E^*(\sigma^{ij})=\delta^2 E^* \tag{10.8-6}$$

$E^*(\sigma^{ij})$极小的条件是

$$\delta E^*=0 \tag{10.7-10}$$

和

$$\delta^2 E^*\geqslant 0 \tag{10.8-7}$$

在线弹性情况下

$$W^*=W\geqslant 0$$

因此

$$W^*(\sigma^{ij})=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}C_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \tag{10.8-8}$$

式中 C_{ijkl} 为弹性柔度,即

$$\varepsilon_{ij}=C_{ijkl}\sigma^{kl}$$

这样

$$\frac{\partial^2 W^*}{\partial\sigma^{ij}\partial\sigma^{kl}} = C_{ijkl} \tag{10.8-9}$$

因此(10.8－5c)式成为

$$\delta^2 E^* = \int_B \delta^2 W^* \mathrm{d}V = \int_B \frac{1}{2} C_{ijkl}\delta\sigma^{ij}\delta\sigma^{kl} \mathrm{d}V$$

$$= \int_B W^*(\delta\sigma^{ij})\mathrm{d}V \geqslant 0. \tag{10.8-10}$$

因为 W^* 是正定的(见§10.6).

由此证明:对于线弹性物体,在平衡状态下,总余能 $E^*(\sigma^{ij})$ 有极小值.因此,$\delta E^*=0$[(10.7－10)式]称为最小总余能原理.

最小总余能原理实质上等价于弹性体的变形连续条件.

为了说明最小总余能原理的应用,下面再以§10.4 中棱柱杆的扭转问题为例(见图 10－4)展开讨论.

$$W^* = \frac{1}{2G}(\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2) \tag{10.8-11}$$

作为讨论的起点,必须选择一应力场,它满足平衡方程(8.3－5)式

$$\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} = 0, \quad 在域 A 内 \tag{10.8-12}$$

以及边界条件(8.3－7)式

$$\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y = 0, \quad 在 c 上 \tag{10.8-13}$$

假设有应力函数 $\psi(x,y)$存在(见(8.3－11)式),使得

$$\sigma_{zx} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \sigma_{zy} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{10.8-14}$$

则方程(10.8－12)恒能满足,这时(10.8－13)式成为

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}n_x - \frac{\partial\psi}{\partial x}n_y = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s} = 0$$

即(见(8.3－13)式)

$$\psi = k, \quad 在 c 上 \tag{10.8-15}$$

为简化边界条件,可令 $k=0$,这不影响应力分量的值(见§8.3 的讨论).这样

$$W^* = \frac{1}{2G}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] \tag{10.8-11$'$}$$

$$\delta W^* = \frac{1}{2G}\left[2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]$$

计算 δU^*,进行分部积分,应用散度定理,并项后,可得

$$\delta U^* = L\int_A \delta W^* \mathrm{d}A = \frac{L}{G}\int_A \left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial(\delta\psi)}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial(\delta\psi)}{\partial x}\right]\mathrm{d}A$$
$$= -\frac{L}{G}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\delta\psi\mathrm{d}A + \frac{L}{G}\oint_c\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}n_x + \frac{\partial\psi}{\partial y}n_y\right)\delta\psi\mathrm{d}s \tag{10.8-16}$$

位移边界条件按(8.3-1)式给定,即

$$\left.\begin{aligned} z = 0:&\quad u_x^* = u_y^* = 0 \\ z = L:&\quad u_x^* = -\beta L y,\quad u_y^* = \beta L x \end{aligned}\right\} \tag{10.8-17}$$

因此

$$\int_{S_1} u_i^* \delta P^i \mathrm{d}S = \beta L \int_A (x\delta\sigma_{yz} - y\delta\sigma_{zx})\mathrm{d}A$$
$$= \beta L \int_A \left(x\frac{\partial}{\partial x}\delta\psi + y\frac{\partial}{\partial y}\delta\psi\right)\mathrm{d}A$$
$$= -\beta L\int_A\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\delta\psi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\delta\psi) - 2\delta\psi\right]\mathrm{d}A \tag{10.8-18}$$

应用散度定理,上式成为

$$\int_{S_2} u_i^* \delta P^i \mathrm{d}S = \beta L\int_A 2\delta\psi\mathrm{d}A - \beta L\oint_c (xn_x + yn_y)\delta\psi\mathrm{d}s \tag{10.8-19}$$

将(10.8-16)及(10.8-19)式代入(10.7-10)式,并项后得

$$-\frac{L}{G}\int_A\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2G\beta\right)\delta\psi\mathrm{d}A +$$
$$\frac{L}{G}\oint_c\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + G\beta x\right)n_x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + G\beta y\right)n_y\right]\delta\psi\mathrm{d}s = 0 \tag{10.8-20}$$

由于 $\delta\psi$ 在 A 内是任意的,在 c 上等于零(见 10.8-15 式),(10.8-20)式中的曲线积分项等于零,因此可得相容方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -2G\beta,\quad \text{在域 } A \text{ 内} \tag{10.8-21}$$

常数 β 可通过杆端力矩平衡条件由 ψ 决定,见 § 8.3 的讨论.

$$T = \int_A (x\sigma_{yz} - y\sigma_{zx})\mathrm{d}A = -\int_A\left(x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\mathrm{d}A$$
$$= -\oint_c (xn_x + yn_y)\psi\mathrm{d}s + \int_A 2\psi\mathrm{d}A \tag{10.8-22}$$

由于在周界 c 上 $\psi=0$,因此上式等号右边的曲线积分项为 0,这样

$$T=2\int_A \psi \mathrm{d}A \qquad (10.8-23)$$

§ 10.9 赫林格－赖斯纳变分原理

虚功原理(§10.3)可以作为弹性静力学的基本的变分原理.引进拉格朗日乘子,可以将这个变分原理推广.

根据(10.4－1)式,弹性固体的总势能为

$$E=\int_B [W(\varepsilon_{ij})-F^i u_i]\mathrm{d}V-\int_{S_1} P^{i^*} u_i \mathrm{d}S \qquad (10.9-1)$$

式中,假设 F^i 和 P^{i^*} 不随 u_i,ε_{ij} 的变化而改变,它们都是保守力.虚功原理指出:在满足变形几何关系和几何边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_i|_j+u_j|_i) && \text{在域 } B \text{ 内} \quad (10.9-2a)\\ &u_i=u_i^* && \text{在 } S_2 \text{ 上} \quad (10.9-2b)\end{aligned}\right\}$$

的所有可能的应变场和位移场,以及满足应力－应变关系

$$\sigma^{ij}=\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad \text{在域 } B \text{ 内} \qquad (10.9-3)$$

的所有可能的应力场中,那个也满足静力平衡方程和力边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^{ij}|_j+F^i=0 && \text{在域 } B \text{ 内}\\ &\sigma^{ij}n_j=P^{i^*} && \text{在 } S_1 \text{ 上}\end{aligned}\right\} \qquad (10.9-4)$$

的应力场,使总势能 E 有驻值,即使得 $\delta E=0$.当计算 E 的变分 δE 时,通过在域 B 和表面 S_2 分别引入拉格朗日乘子 $\lambda^{ij}=\lambda^{ji}$ 和 μ^i,可以将约束条件(10.9－2a)和(10.9－2b)放松.这样,构造一个新的泛函

$$E_R=\int_B \left\{W(\varepsilon_{ij})-F^i u_i-\lambda^{ij}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_i|_j+u_j|_i)\right]\right\}\mathrm{d}V-\int_{S_1} P^{i^*} u_i \mathrm{d}S-\int_{S_2}\mu^i(u_i-u_i^*)\mathrm{d}S \qquad (10.9-5)$$

计算 E_R 的变分 δE_R 时,ε_{ij},u_i,λ_{ij},μ^i 均作为独立的量,

$$\delta E_R=\int_B\left\{\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}-F^i\delta u_i-\lambda^{ij}\left[\delta\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(\delta u_i|_j+\delta u_j|_i)\right]-\delta\lambda^{ij}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(u_i|_j+u_j|_i)\right]\right\}\mathrm{d}V-\int_{S_1}P^{i^*}\delta u_i\mathrm{d}S-$$

$$\int_{S_2} \delta\mu^i (u_i - u_i^*) \mathrm{d}S - \int_{S_2} \mu^i \delta u_i \mathrm{d}S$$

对 $\int_B \frac{1}{2}\lambda^{ij}(\delta u_i|_j + \delta u_j|_i)\mathrm{d}V$ 应用散度定理，上式可写成

$$\begin{aligned}\delta E_R = &\int_B \left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} - \lambda^{ij}\right)\delta\varepsilon_{ij} - (\lambda^{ij}|_j + F^i)\delta u_i - \right.\\ &\left.\left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i)\right]\delta\lambda^{ij}\right\}\mathrm{d}V + \\ &\int_{S_1}(\lambda^{ij}n_j - P^{i*})\delta u_i \mathrm{d}S + \int_{S_2}(\lambda^{ij}n_j - \mu^i)\delta u_i \mathrm{d}S - \\ &\int_{S_2}(u_i - u_i^*)\delta\mu^i \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{10.9-6}$$

令 $\delta E_R = 0$，则得出线弹性理论的基本方程

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda^{ij} && \text{在域 } B \text{ 内} \\ &\lambda^{ij}|_j + F^i = 0 && \text{在域 } B \text{ 内} \\ &\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i) && \text{在域 } B \text{ 内} \end{aligned}\right\} \tag{10.9-7}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^{ij}n_j = P^{i*} && \text{在 } S_1 \text{ 上} \\ &\lambda^{ij}n_j = \mu^i && \text{在 } S_2 \text{ 上} \\ &u_i = u_i^* && \text{在 } S_2 \text{ 上} \end{aligned}\right\} \tag{10.9-8}$$

由此看出，拉格朗日乘子 λ^{ij} 是应力张量的分量，μ^i 是应力矢量的分量，即

$$\begin{aligned} \lambda^{ij} &= \sigma^{ij} \\ \mu^i &= P^i \end{aligned} \tag{10.9-9}$$

这样(10.9-5)式可以改写成以下的形式

$$\begin{aligned} E_R = &\int_B \left[W(\varepsilon_{ij}) - \sigma^{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}(u_i|_j + u_j|_i) - F^i u_i\right]\mathrm{d}V - \\ &\int_{S_1} P^{i*} u_i \mathrm{d}S - \int_{S_2} P^i (u_i - u_i^*) \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{10.9-10}$$

由此得出结论：满足线弹性理论基本方程(10.9-2)、(10.9-3)和(10.9-4)的那组应力场、应变场和位移场使 E_R 有驻值，即 $\delta E_R = 0$. 这便是赫林格-赖斯纳变分原理. 这个变分原理也可以用余能密度 $W^*(\sigma^{ij})$ 表示，

由于

$$W^*(\sigma^{ij}) = \sigma^{ij}\varepsilon_{ij} - W(\varepsilon_{ij}) \tag{10.9-11}$$

因此,

$$E_R = \int_B \left[\frac{1}{2}\sigma^{ij}(u_i|_j + u_j|_i) - F^i u_i - W^*(\sigma^{ij})\right] \mathrm{d}V - \int_{S_1} P^{i*} u_i \mathrm{d}S - \int_{S_2} P^i(u_i - u_i^*)\mathrm{d}S \tag{10.9-12a}$$

在泛函 E_R(10.9-12)式中,包含应力场 σ^{ij} 和位移场 u_i 两类变量.赫林格-赖斯纳变分原理指出:

$$\delta E_R = 0 \tag{10.9-12b}$$

若在(10.9-12a)式中的应力场也满足平衡方程(10.9-4a)和力的边界条件(10.9-4b),则 $\delta E_R = 0$ 给出余虚功原理(10.7-9)和(10.7-10),这很容易证明.(10.9-12a)式中的第一项

$$\begin{aligned}\int_B \frac{1}{2}\sigma^{ij}(u_i|_j + u_j|_i)\mathrm{d}V &= \int_B \sigma^{ij}u_i|_j \mathrm{d}V \\ &= \int_B [(\sigma^{ij}u_i)|_j - \sigma^{ij}|_j u_i]\mathrm{d}V \\ &= \int_S (\sigma^{ij}u_i)n_j \mathrm{d}S - \int_B \sigma^{ij}|_j u_i \mathrm{d}V\end{aligned}$$

由于 σ^{ij} 满足(10.9-4a)和(10.9-4b)式,(10.9-12a)式成为

$$E_R = -\int_B W^* \mathrm{d}V + \int_{S_2} P^i u_i^* \mathrm{d}S = -U^* + \int_{S_2} P^i u_i^* \mathrm{d}S = -E^* \tag{10.7-9}$$

由此得出

$$\delta E_R = \delta E^* = 0 \tag{10.7-10}$$

由此可以看出,由虚功原理建立了最小总势能原理,之后,通过引入拉格朗日乘子,可将最小总势能原理推广,从而得出一族变分原理,包括赫林格-赖斯纳变分原理以及最小总余能原理等等.

为了举例说明(10.9-12)式的应用,下面重新推导§9.3的中厚板理论.针对这个问题,(10.9-12a)式成为(略去体力 F^i)

$$E_R = \int_A \left[\frac{1}{2}M_{\alpha\beta}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha}) + F_{S\alpha}(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - \frac{F_{S\alpha}F_{S\alpha}}{2k^2Gh} - \frac{(1+\nu)M_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} - \nu M^2}{2D(1-\nu^2)} - pw\right]\mathrm{d}A -$$

$$\int_{C_1}(M_{nn}^*\psi_n + M_{nl}^*\psi_l + F_{Sn}^* w)\mathrm{d}s - \int_{C_2}[M_{nn}(\psi_n - \psi_n^*) + M_{nl}(\psi_l - \psi_l^*) + F_{Sn}(w - w^*)]\mathrm{d}s \tag{10.9-13}$$

将 $w, \psi_\alpha, M_{\alpha\beta}$ 和 $F_{S\alpha}$ 作为独立变量,则 δE_R 为

$$\begin{aligned}\delta E_R = &\int_A \Big\{-(M_{\alpha\beta,\beta} - F_{S\alpha})\delta\psi_\alpha - (F_{S\alpha,\alpha} + p)\delta w + \\ &\left[\frac{1}{2}(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha}) - \frac{(1+\nu)M_{\alpha\beta} - \nu M\delta_{\alpha\beta}}{D(1-\nu^2)}\right]\delta M_{\alpha\beta} + \\ &\left[(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) - \frac{F_{S\alpha}}{k^2 Gh}\right]\delta F_{S\alpha}\Big\}\mathrm{d}A + \\ &\int_{C_1}[(M_{nn} - M_{nn}^*)\delta\psi_n + (M_{nl} - M_{nl}^*)\delta\psi_l + \\ &(F_{Sn} - F_{Sn}^*)\delta w]\mathrm{d}l - \int_{C_2}[(\psi_n - \psi_n^*)\delta M_{nn} + \\ &(\psi_l - \psi_l^*)\delta M_{nl} + (w - w^*)\delta F_{Sn}]\mathrm{d}l = 0\end{aligned} \tag{10.9-14}$$

因此,在域 A 内:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - F_{S\alpha} = 0 \tag{10.9-15a}$$

$$F_{S\alpha,\alpha} + p = 0 \tag{10.9-15b}$$

$$(1+\nu)M_{\alpha\beta} - \nu M\delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}D(1-\nu^2)(\psi_{\alpha,\beta} + \psi_{\beta,\alpha}) \tag{10.9-16a}$$

$$F_{S\alpha} = k^2 Gh(\psi_\alpha + w_{,\alpha}) \tag{10.9-16b}$$

在 C_1 上,

$$M_{nn} = M_{nn}^*, \quad M_{nl} = M_{nl}^*, \quad F_{S\alpha} = F_{S\alpha}^* \tag{10.9-17a}$$

在 C_2 上,

$$\psi_n = \psi_n^*, \psi_l = \psi_l^*, w = w^* \tag{10.9-17b}$$

(10.9-15)至(10.9-17)式表达了本例题所讨论的中厚板理论的全部方程,它们与§9.3所建立的方程相同.

下一章将进一步讨论应用变分原理寻求弹性力学边值问题的近似解和数值解.

习 题

1. 平板单位面积的应变能 W_p 为

$$W_p = \int_{-h/2}^{h/2} W \mathrm{d}z$$

据此，推导赖斯纳板的 W_p（直角坐标系）为

$$W_p = \frac{1}{2}(M_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} + F_{S\alpha} q_\alpha)$$

$$= \frac{1}{2} D[\nu m^2 + (1-\nu) m_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}] + \frac{1}{2} k^2 G h q_\alpha q_\alpha$$

2. 平板单位面积的余应变能 W_p^*（直角坐标系）为

$$W_p^* = \int_{-h/2}^{h/2} W^* \mathrm{d}z$$

由此出发试推导赖斯纳板的 W_p^* 为

$$W_p^* = \frac{(1+\nu) M_{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} - \nu M^2}{2D(1-\nu^2)} + \frac{F_{S\alpha} F_{S\alpha}}{2k^2 G h}$$

式中，$M = M_{\alpha\alpha}$

3. 证明对于线弹性，各向同性材料的余应变能密度的表示式（直角坐标系）为：

$$W^* = \frac{1}{2E}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11}) + \frac{1}{2G}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)$$

第十一章　近似解法和数值解法

§11.1　里 茨 方 法

里茨方法是应用变分原理从一族设定的试探解中选取“最佳”的近似解的方法.若有某个能量极小值定理与变分原理相联系,则“最佳”的近似解是这一族试探解中使能量泛函有极小值的那个解.比较典型的做法是试探解中包含一组待定参数,将试探解代入变分原理,可得出一组线性联立代数方程,用来决定这一组参数.

1. 今考虑一弹性固体,受保守力作用,求该物体位移场的近似解.由于最小总势能原理是基于位移场的变分,故取最小总势能原理作为求解本题的变分原理.假设试探解取如下的形式:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u(x_1,x_2,x_3) = u_0(x_1,x_2,x_3) + \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x_1,x_2,x_3) \\ u_2 &= v(x_1,x_2,x_3) = v_0(x_1,x_2,x_3) + \sum_{i=1}^{n} b_i v_i(x_1,x_2,x_3) \\ u_3 &= w(x_1,x_2,x_3) = w_0(x_1,x_2,x_3) + \sum_{i=1}^{n} c_i w_i(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}\right\} \tag{11.1-1}$$

只要 u_0, v_0, w_0 和 u_i, v_i, w_i 设定,则试探解(11.1-1)将由参数 a_i, b_i, c_i 定义,$i=1,2,\cdots,n$.这样

$$\left.\begin{aligned} \delta u_1 &= \delta u = \sum_{i=1}^{n} u_i \delta a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial a_i}\delta a_i \\ \delta u_2 &= \delta v = \sum_{i=1}^{n} v_i \delta b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial b_i}\delta b_i \\ \delta u_3 &= \delta w = \sum_{i=1}^{n} w_i \delta c_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial c_i}\delta c_i \end{aligned}\right\} \tag{11.1-2}$$

由于是应用最小总势能原理于试探解,所以试探解必须满足位移边界条件:

$$u_i = u_i^* \qquad 在\ S_2\ 上 \tag{10.3-1c}$$

同时,只有与这个边界条件相容的变分才是可能的变分,因此,试探解还必须满足变分条件

$$\delta u_i = 0 \qquad \text{在 } S_2 \text{ 上} \tag{10.3-2}$$

将(11.1-1)、(11.1-2)式与(10.3-1c)、(10.3-2)式分别比较,可以看出试探解在 S_2 上必须满足下列条件:

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = u_1^*, v_0 = u_2^*, w_0 = u_3^* \\ u_i = v_i = w_i = 0, i = 1,2,\cdots,n \end{array}\right\} \text{在 } S_2 \text{ 上} \tag{11.1-3}$$

这表明函数 u_0, v_0, w_0 计及非齐次边界条件,而 u_i, v_i, w_i 满足相应的齐次边界条件.应当注意,试探解设有必要满足表面力边界条件(10.3-1b),因为在§10.4 中已指出,满足平衡方程和表面力边界条件是应用最小总势能原理的自然结果,因此,表面力边界条件常被称为自然边界条件.应用最小总势能原理于试探解,则在最后的结果中,平衡方程和表面力边界条件均能近似地满足.选择试探解,通常采用初等函数作为 u_i, v_i, w_i,如多项式,指数函数,三角函数,或双曲函数,这样,数学运算易于进行.当然,运用里茨方法时,运用者的经验和对求解的问题的力学特性的理解,将起重要的作用,使得出的近似解既简单又有较高的精度.

若试探解(11.1-1)的选择满足了(11.1-3)式,则可将设定的试探解代入总势能表达式(10.4-1).这样总势能 E 便成为待定参数 a_i, b_i, c_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ 的函数

$$E = E(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{11.1-4}$$

由(10.3-8)式

$$\delta E = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial E}{\partial a_i}\delta a_i + \frac{\partial E}{\partial b_i}\delta b_i + \frac{\partial E}{\partial c_i}\delta c_i\right) = 0$$

由于 $\delta a_i, \delta b_i, \delta c_i$ 是独立的,任意的,因此,可得出

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0,\ \frac{\partial E}{\partial b_i} = 0,\ \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{11.1-5}$$

从这一组 $3n$ 个线性代数方程,可求解得到参数 a_i, b_i, c_i.将它们代回(11.1-1)式,可得到位移场 u、v、w 的近似解.将位移场的近似解代入(5.3-2)式,然后应用(6.2-20)式,可得到应变场和应力场的近似解.但是,由于应变场和应力场是通过对位移场的微分运算求得的,因此,它们的精度不可能有位移场的精度那样高.

2. 若人们关心的主要是物体的应力场,则可以采用另一途径,将里茨方法与最小总余能原理结合起来,求应力场的近似解.这时,可先假设一族应力场的试探解,试探解包含若干待定参数.将试探解代入(10.8-

1)式,得到总余能 E^* 的表示式.将 E^* 的表示式代入(10.7-10)式,即可求得待定参数.应用最小总余能原理时,比较复杂的问题是试探解必须满足平衡方程(10.3-1a)和表面力边界条件(10.3-1b),并且应力场的变分 $\delta\sigma^{ij}$ 必须满足(10.7-3)式.但若采用应力函数来表示应力场,则应力函数的试探解可自动满足平衡方程,问题的数学处理也可以简化.

里茨方法还可以结合赫林格-赖斯纳变分原理(10.9-12)使用,这时须分别独立地假设位移场和应力场的试探解,将它们代入(10.9-12)式,可得出以待定参数表示的 E_R 式.令 $\delta E_R=0$,可得到一组线性代数方程,求解后,可得到这些参数的值.采用这样的途径求解,可同时得出位移场和应力场的近似解,它们的精度是相当的.尤有进者,采用这样的途径求解,假设的位移场可不必满足位移边界条件,假设的应力场既不必满足平衡方程,也不必满足表面力边界条件,这些条件的满足都是赫林格-赖斯纳变分原理的结果.因此,通过变分原理 $\delta E_R=0$ 求得的解,能近似地满足上述所有的条件,这将使寻找试探解的工作简化.

§ 11.2 里茨方法的应用

例 1 一弹性基础梁承受均布载荷,如图 11-1 所示.表征梁的挠度的微分方程和边界条件是

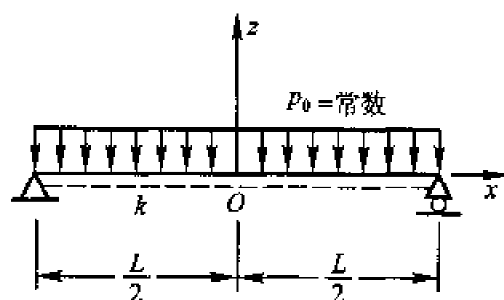


图 11-1

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}+\frac{k}{EI}w=-\frac{p_0}{EI} \tag{11.2-1a}$$

$$w\left(\pm\frac{L}{2}\right)=0,\quad M\left(\pm\frac{L}{2}\right)=0 \tag{11.2-1b.c}$$

式中

$$M=-EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2},\quad F_S=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \tag{11.2-2}$$

梁－弹性基础系统的总势能包括三项：

1. 储存在梁内的应变能

$$U_1 = \int_{-L/2}^{L/2} W_B \mathrm{d}x = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} EIm^2 \mathrm{d}x = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} EI \left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \right)^2 \mathrm{d}x$$

2. 储存在弹性基础内的应变能

$$U_2 = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} kw^2 \mathrm{d}x$$

3. 载荷的势能

$$U_3 = -\int_{S_1} T_i^* u_i \mathrm{d}S = -\int_{-L/2}^{L/2} p(x) w \mathrm{d}x - \left[F_S^* w - M^* \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} \right]_{-L/2}^{L/2} = \int_{-L/2}^{L/2} p_0 w \mathrm{d}x$$

将这三项相加，得到系统的总势能：

$$E = \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2} EI \left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} kw^2 + p_0 w \right] \mathrm{d}x \qquad (11.2-3)$$

系统的总余能包括：

1. 梁的余应变能

$$U_1^* = \int_{-L/2}^{L/2} W_B^* \mathrm{d}x = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} \mathrm{d}x$$

2. 弹性基础的余能

$$U_2^* = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} kw^2 \mathrm{d}x = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2k} \left(-p_0 + \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} \right)^2 \mathrm{d}x$$

3. 与给定位移相联系的能量

$$U_3^* = -\int_{S_2} u_i^* T_i \mathrm{d}S = -\left[F_S w^* - M \frac{\mathrm{d}w^*}{\mathrm{d}x} \right]_{-L/2}^{L/2} = 0$$

将以上三项相加，可得到系统的总余能如下：

$$E^* = \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} + \frac{1}{2k} \left(-p_0 + \frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} \right)^2 \right] \mathrm{d}x \quad (11.2-4)$$

为简化以下讨论中的代数运算和数值运算，将(11.2－1)至(11.2－4)式表示成无量纲式：

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \alpha w = -1, \qquad 0 \leqslant x < 1 \qquad (11.2-1a)'$$

$$w(1) = M(1) = 0 \qquad (11.2-1b)'$$

$$w(-x) = w(x), \text{或 } w'(0) = F_S(0) = 0 \quad (11.2-1c)'$$

式中

$$\alpha - \frac{kL^4}{16EI} \qquad (11.2-1b)''$$

$$M = -\frac{d^2 w}{dx^2} = -w'' \qquad (11.2-2a)'$$

$$F_S = \frac{dM}{dx} = M' \qquad (11.2-2b)'$$

$$E = \frac{1}{2}\int_0^1 [(w'')^2 + \alpha w^2 + 2w]dx \qquad (11.2-3)'$$

$$E^* = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[M^2 + \frac{1}{\alpha}(M'' - 1)^2\right]dx \qquad (11.2-4)'$$

在上列方程中,变量右上方的撇表示对无量纲坐标 x 求导.利用本问题的解的对称性[$w(-x) = w(x)$],用梁沿 $+x$ 方向的半长($0 \leqslant x \leqslant 1$)代替梁原来的长度($-1 \leqslant x \leqslant 1$).这样,边界条件(11.2-1b)、(11.2-1c)和定积分(11.2-3)、(11.2-4)的下限都需作相应的修改.表 11-1 列出无量纲变量转换成有量纲形式的转换因子.

表 11-1 弹性基础梁的无量纲变量

无量纲变量	转换因子	物理意义
x	$L/2$	坐标
w	$\frac{p_0 L^4}{16EI}$	位移
M	$\frac{p_0 L^2}{4}$	弯矩
F_S	$\frac{p_0 L}{2}$	剪力
E	$\frac{p_0^2 L^5}{16EI}$	势能
E^*	$\frac{p_0^2 L^5}{16EI}$	余能

方程(11.2－1)的精确解在§9.2中已给出，见(9.2－10)式，此式的无量纲形式为

$$\alpha w(x) = -1 + \frac{2}{\Delta}(\cos a \cdot \cosh a \cdot \cos ax \cdot \cosh ax + \sin a \cdot \sinh a \cdot \sin ax \cdot \sinh ax) \quad (11.2-5a)$$

$$a^2 M(x) = \frac{1}{\Delta}(\cos a \cdot \cosh a \cdot \sin ax \cdot \sinh ax - \sin a \cdot \sinh a \cdot \cos ax \cdot \cosh ax) \quad (11.2-5b)$$

$$\alpha w(0) = -1 + \frac{2}{\Delta}\cos a \cdot \cosh a \quad (11.2-5c)$$

$$a^2 M(0) = -\frac{1}{\Delta}\sin a \cdot \sinh a \quad (11.2-5d)$$

式中

$$\Delta = \cosh 2a + \cos 2a \quad (11.2-5e)$$

$$\alpha = 4a^4 = \frac{kL^4}{16EI} \quad (11.2-5f)$$

$$a = \frac{\beta L}{2} \quad (11.2-5g)$$

对(11.2－3′)、(11.2－4′)式进行分部积分，可以证明，本题的精确解满足以下关系：

$$E = -E^* = \frac{1}{2}\int_0^1 w\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\alpha}\left[1 - \frac{1}{2\Delta a}(\sinh 2a + \sin 2a)\right] \quad (11.2-6)$$

表11－2给出对应于不同的α，梁中点挠度、弯矩和总势能、总余能的值.

表11－2 弹性基础梁——精确解

α	$-w(0)$	$-M(0)$	$E^* = -E$
0	0.208 333 3	0.5	0.066 666 67
1	0.178 829 6	0.427 235 8	0.057 274 59
10	0.078 355 3	0.179 620 1	0.025 286 14
100	0.011 341 6	0.016 713 8	0.003 901 09
1 000	0.001 025 2	0.000 878 8	0.000 437 08

下面应用里茨方法,结合最小总势能原理求弹性基础梁的近似解.根据问题的特点,选择的位移试探解必须对称于 z 轴,并满足位移边界条件 $w(1)=0$,但没有必要满足自然边界条件 $M(1)=0$. 今选择试探解

$$w_1(x)=a_1 w_0(x) \tag{11.2-7a}$$

$$w_0(x)=-\frac{1}{24}(5-x^2)(1-x^2) \tag{11.2-7b}$$

$w_0(x)$是无弹性基础时($\alpha=0$)梁的精确解.由(11.2-7)式可得

$$M_1(x)=-\frac{1}{2}a_1(1-x^2) \tag{11.2-7c}$$

对于试探解(11.2-7),$w_1(1)=M_1(1)=0$,(11.2-3′)式可以分部积分,得

$$E_1=\frac{1}{2}\int_0^1(w_1''''+\alpha w_1+2)w_1\mathrm{d}x \tag{11.2-8a}$$

将(11.2-7)代入(11.2-8a)可得

$$E_1=\frac{1}{15}\left[\left(1+\frac{31\alpha}{189}\right)a_1^2-2a_1\right] \tag{11.2-8b}$$

令$\dfrac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}a_1}=0$,可以求出 a_1 的值:

$$a_1=\left(1+\frac{31\alpha}{189}\right)^{-1}$$

由此可得

$$w_1(0)=-\frac{5}{24}a_1,\ M_1(0)=-\frac{1}{2}a_1,\ E_1=-\frac{1}{15}a_1 \tag{11.2-9}$$

表 11-3 给出这个近似解以及它与精确解的比较.

表 11-3 弹性基础梁的近似解

α	$-w_1(0)$(%误差)	$-M_1(0)$(%误差)	$-E_1$(%误差)
0	0.208 3(0)	0.5(0)	0.066 667(0)
1	0.179 0(0.1)	0.429 5(0.5)	0.057 273(−0.003)
10	0.078 9(0.6)	0.189 4(5)	0.025 251(−0.1)
100	0.012 0(6)	0.028 7(72)	0.003 831(−2)
1 000	0.001 3(30)	0.003 0(233)	0.000 404(−8)

三角函数也可选择作为试探解.例如选择

$$w_2(x) = a_2 \sin \frac{(1+x)\pi}{2} \tag{11.2-10}$$

读者可以作为练习,应用与上面相同的方法和步骤,求得近似解的待定参数 a_2,以及 $w_2(0)$,$M_2(0)$,和 E_2 的值,并与精确解以及近似解 w_1 中相应的值比较.

上例中由近似解得到的弯矩值的精度较位移值的精度低,这可由表 11-3 看出,其原因是弯矩是由位移的二阶导数计算的,因而其精度降低.若将里茨方法与最小总余能原理结合应用,则可直接得到弯矩的较精确的近似解.这时以弯矩(合应力)作为未知量,弯矩的试探解必须满足力边界条件 $M(1)=0$ 以及对称条件 $M(-x)=M(x)$.假设弯矩的试探解为

$$M_1(x) = a_1(1-x^2) \tag{11.2-11}$$

将上式代入(11.2-4)′,得

$$E_1^* = \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{8\alpha}{15}a_1^2 + (1+2a_1)^2\right]$$

令

$$\frac{\mathrm{d}E_1^*}{\mathrm{d}a_1} = 0$$

得

$$a_1 = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{2\alpha}{15}\right)^{-1} = M_1(0) \tag{11.2-12}$$

为提高近似解的精度,可以采用更高阶的多项式作为试探解.设以 4 阶多项式作为试探解,即

$$M_2(x) = (1-x^2)(a_1 + a_2x^2) \tag{11.2-13}$$

将上式代入(11.2-4′)式,得

$$2\alpha E_2^* = \frac{8\alpha}{15}\left[a_1^2 + \frac{2}{7}a_1a_2 + \frac{a_1^2}{21}\right] + (2a_2 - 2a_1 - 1)^2 -$$

$$8a_2(2a_2 - 2a_1 - 1) + \frac{144}{5}a_2^2$$

令

$$\frac{\partial E_2^*}{\partial a_1} = \frac{\partial E_2^*}{\partial a_2} = 0$$

可得到

$$a_1 = -\frac{8}{5\Delta}\left(1 - \frac{5\gamma}{168}\right) = M_2(0), \quad a_2 = -\frac{3\gamma}{7\Delta} \tag{11.2-14}$$

式中，

$$\Delta=\frac{16}{5}\left(1+\frac{26}{21}\gamma+\frac{5\gamma^2}{588}\right),\quad \gamma=\frac{2\alpha}{15} \qquad (11.2-14a)$$

表 11－4 列出 $M_1(0)$，$M_2(0)$以及精确解 $M(0)$以资比较.

表 11－4 弹性基础梁——近似解(弯矩)

α	$-M(0)$	$-M_1(0)$(%误差)	$-M_2(0)$(%误差)
0	0.5	0.5(0)	0.5(0)
1	0.427 2	0.441 2(3)	0.427 4(0.05)
10	0.179 6	0.214 3(19)	0.180 1(0.3)
100	0.016 7	0.034 9(109)	0.015 9(－5)
1 000	0.000 9	0.003 7(311)	－0.004 7(－622)

若应用里茨方法与赫林格－赖斯纳变分原理相结合，则可同时得到挠度 $w(x)$和弯矩 $M(x)$的近似解. 对于弹性基础梁这个问题，(10.9－11)和(10.9－12 a)式给出

$$E_R=\int_0^1\left(\frac{1}{2}\alpha w^2-\frac{1}{2}M^2-Mw''+w\right)\mathrm{d}x \qquad (11.2-15)$$

假设试探解为

$$\left.\begin{aligned} w_1(x)&=a(1-x^2)\\ M_1(x)&=b(1-x^2)\end{aligned}\right\} \qquad (11.2-16)$$

将(11.2－16)式代入(11.2－15)式，得

$$E_R=\frac{4\alpha}{15}a^2-\frac{4}{15}b^2+\frac{4}{3}ab+\frac{2}{3}a$$

应用赫林格－赖斯纳变分原理(10.9－12b)

$$\delta E_R=\frac{\partial E_R}{\partial a}\delta a+\frac{\partial E_R}{\partial b}\delta b=0$$

由此得

$$\frac{\partial E_R}{\partial a}=0,\ \frac{\partial E_R}{\partial b}=0$$

将上二式联立求解，可以求出 a，b 的值，读者可自行计算，由此得

$$\left.\begin{aligned} w_1(0) &= a = -\frac{1}{5}\left(1+\frac{4\alpha}{25}\right)^{-1} \\ M_1(0) &= b = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{4\alpha}{25}\right)^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{11.2-17}$$

若 $\alpha=0$，则上二式为精确解．若 $\alpha=1$，则 $w_1(0)=-0.172\ 4$，其误差为 4 %，$M_1(0)=-0.431\ 0$，其误差为 0.9 %．

例 2 在均布载荷作用下，4 边固支方板的弯曲．

分析这个问题，采用直角坐标系．薄板理论的基本方程已在 §9.4 中讨论并列出，下面是这个基本方程的无量纲形式．

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^4 w = 1,\ -1<x<1,\ -1<y<1 \\ &w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ x = \pm 1 \\ &w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ y = \pm 1 \end{aligned}\right\} \tag{11.2-18}$$

$$\left.\begin{aligned} M_{xx} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_{yy} &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ M_{xy} &= -(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ F_{Sx} &= -\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w) \\ F_{Sy} &= -\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w) \end{aligned}\right\} \tag{11.2-19}$$

$$E = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_0^1\int_0^1 w\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.2-20a}$$

$$E' = \frac{1}{2(1-\nu^2)}\int_0^1\int_0^1[M_{xx}^2 + M_{yy}^2 - 2\nu M_{xx}M_{yy} + 2(1+\nu)M_{xy}^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.2-20b}$$

表 11－5 给出了转换成无量纲形式的转换因了．在推导方程(11.2－20)时利用了挠度 w 的对称条件，即

$$w(-x,y)=w(x,-y)=w(x,y) \qquad (11.2-21a)$$

表 11－5 四边固支方板的无量纲变量

无量纲变量	转换因子	物理量
x,y	$\frac{a}{2}$	坐标
w	$\frac{p_0 a^4}{16D}$	挠度
M	$\frac{p_0 a^2}{4}$	弯矩
F_S	$\frac{p_0 a}{2}$	剪力
E,E^*	$\frac{p_0^2 a^6}{16D}$	势能
1	p_0	载荷强度

在本问题中，还有一个 x,y 相互交换(方板)的对称条件，即

$$w(x,y)=w(y,x) \qquad (11.2-21b)$$

利用这些对称条件，可以减少求近似解的工作量．作为第一近似，可以假设一个挠度的试探解，它须满足运动学边界条件(11.2－18b、c)以及对称条件(11.2－21)．今假设

$$w_1(x,y)=c_1\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) \qquad (11.2-22)$$

将上式代入(11.2－20a)式，得

$$E_1=\frac{1}{8}\left[\pi^4\frac{c_1^2}{2}-2c_1\right]$$

令

$$\frac{dE_1}{dc_1}=0$$

得

$$\left.\begin{aligned}&w_1(0,0)=c_1=\frac{2}{\pi^4}=0.020\ 5\\&M_{xx}^{(1)}(1,0)=-\frac{\pi^2c_1}{2}=-0.101\\&M_{xx}^{(1)}(0,0)=(1+\nu)\frac{\pi^2c_1}{2}=0.132,(\nu=0.3)\end{aligned}\right\}$$

(11.2-23)

在 S. Timoshenko & S. Woinowsky-krieger 编著的“Theory of Plates and Shells”第 2 版中列出的近似解的值为

$$\left.\begin{aligned}&w(0,0)=0.020\ 2\\&M_{xx}^{(1)}(1,0)=-0.205\\&M_{xx}^{(1)}(0,0)=0.092\ 4,(\nu=0.3)\end{aligned}\right\}\qquad(11.2-24)$$

板中点的挠度 $w_1(0,0)$[(11.2-23)式]与铁木辛柯给出的值差别不到 2%，而弯矩的误差则很大. 这是由于弯矩值是从 w_1 的表示式二次求导得出来的，因此带来较大的误差.

若应用最小总余能原理(10.7-10)，则可以直接得到弯矩的近似解. 在这种情况下，假设的 M_{xx}，M_{yy}，M_{xy} 试探解必须满足弯矩平衡方程(9.3-20)，此方程的无量纲形式是

$$\frac{\partial^2M_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2M_{yy}}{\partial y^2}=-1\qquad(11.2-25)$$

在本题中，由于板四边固支，弯矩试探解无需满足任何边界条件. 本题可以采用这样的方法选取试探解：选择方程(11.2-25)的一个特解，例如

$$M_{xx}^{(1)}=c_1-\frac{x^2}{4},\quad M_{yy}^{(1)}=c_1-\frac{y^2}{4},\quad M_{xy}^{(1)}=0$$

(11.2-26)

将(11.2-26)式代入(11.2-20b)式可得到 E^*，令 $\frac{dE^*}{dc_1}=0$，得到 $c_1=\frac{1}{12}$. 这样

$$M_{xx}^{(1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-x^2\right)$$

$$M_{xx}^{(1)}(1,0)=-\frac{1}{6}=-0.167,\quad M_{xx}^{(1)}(0,0)=\frac{1}{12}=0.083\ 3$$

由此计算得到的最大弯矩与铁木辛柯解的误差约为 19%，比取挠度试探

解(11.2－22)给出的弯矩的精度有较大的提高.

§11.3 加权残量法

加权残量法是一种数学方法,它可以直接从微分方程得出近似解.设某个问题的基本微分方程和边界条件分别是

$$Du - d = 0 \quad 在域\ B \tag{11.3-1}$$

$$Gu - g = 0 \quad 在边界面\ S \tag{11.3-2}$$

式中 D、G 为微分算子,d、g 为不含函数 u 的项.

应用加权残量法求解微分方程边值问题,可先假设一试探解

$$u_N = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i \tag{11.3-3}$$

式中 f_i 为试函数,c_i 为待定参数.这个试探解必须满足边界条件(11.3－2).将(11.3－3)式代入微分方程(11.3－1),一般是不能满足的,这样,便出现了残量 R_N,

$$R_N = Du_N - \mathrm{d} \neq 0 \tag{11.3-4}$$

为使试探解 u_N 尽可能逼近精确解,应当使残量 $R_N \to 0$.消除残量的方法是:选择权函数 W_i,使得残量在域 B 内的加权平均值为0.这样便可以列出消除残量的方程式:

$$\int_B R_N W_i \mathrm{d}V = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{11.3-5}$$

于是可以得到求解待定参数 $c_i(i=1,2,\cdots,N)$的 N 个联立代数方程.将求出的 c_i 代入试探解(11.3－3),便得到了满足微分方程(11.3－1)和边界条件(11.3－2)的近似解.

根据权函数 W_i 的不同形式,加权残量法有5种基本方法,即配点法、子域法、布勃诺夫－伽辽金(Bubnov－Galerkin)法,最小二乘法和矩量法等.下面以弹性基础梁为例,说明加权残量法的应用.

弹性基础梁(图11－1)的挠度函数 $w(x)$满足无量纲微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + \alpha w + 1 = 0 \quad (0 \leqslant x < 1) \tag{11.3-6}$$

和边界条件(11.2－1b)′及对称条件(11.2－1c)′.假设试探解为

$$w_N(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) \tag{11.3-7a}$$

它含有 N 个待定参数 $c_i(i=1,2,\cdots,N)$,试探解 $w_N(x)$应满足边界条

件(11.2-1b)′和对称条件(11.2-1c)′即

$$f_i(1)=f''_i(1)=0, f_i(-x)=f_i(x) \quad (11.3-7b、c)$$

将(11.3-7a)式代入微分方程(11.3-6),一般会出现残量

$$R_N=\frac{d^4 w_N}{dx^4}+\alpha w_N+1=R_N(x;c_1,c_2,\cdots,c_N) \quad (11.3-8)$$

加权残量法的作法是:使残量 R_N 在域 $0\leqslant x<1$ 中的加权平均值等于0,其表示式是

$$\int_0^1 R_N(x;c_1,c_2,\cdots,c_N)W_i(x)dx=0 \quad (i=1,2,\cdots,N) \quad (11.3-9)$$

由此可列出 N 个线性代数方程,将它们联立求解,可得到 $c_1,c_2,\cdots,c_N$.下面根据选取的权函数 $W_i(x)$的不同,分别说明配点法,子域法,布勃诺夫-伽辽金法,最小二乘法,矩量法等基本方法.

(1) 配点法

在域 $0\leqslant x<1$ 内选择 N 个点 x_i, $i=1,2,\cdots,N$,并选择

$$W_i(x)=\delta(x-x_i) \quad (11.3-10)$$

式中 $\delta(x-x_i)$为狄拉克 δ(Dirac Delta)函数.根据这个函数的性质,可列出消除残量的方程如下:

$$\int_0^1 R_N(x)W_i(x)dx=R_N(x_i)=0 \quad (11.3-11)$$

这个方程的意义是要求残量在域 $0\leqslant x<1$ 内的 N 个任意选定的点 x_i 上消失,由此给出 N 个联立线性代数方程.对它们求解,可得到参数 $c_1,c_2,\cdots,c_N$.

(2) 子域法

划分域 $0\leqslant x<1$ 为 N 个子域$\{(x_0,x_1),(x_1,x_2),\cdots,(x_{N-1},x_N)\}$,式中 $x_0=0$, $x_N=1$.定义

$$W_i(x)=\begin{cases}1, & x_{i-1}<x<x_i\\ 0, & x \text{ 不在上述子域内}\end{cases} \quad (11.3-12)$$

根据(11.3-9)式,可列出消除残量的方程组:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} R_N(x)dx=0 \quad (i=1,2,\cdots,N) \quad (11.3-13)$$

这样,可以有 N 个联立线性代数方程.对它们求解,可得到参数 $c_1,c_2,$

$\cdots, c_N$.

(3) 布勃诺夫－伽辽金法

布勃诺夫－伽辽金法选择的权函数是试函数本身，即

$$W_i(x) = \frac{\partial w_N}{\partial c_i} = f_i(x) \tag{11.3-14}$$

这样

$$\int_0^1 R_N(x) W_i(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 R_N(x) f_i(x) \mathrm{d}x = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{11.3-15}$$

这是一个广为应用的方法．对于同一族试探解，布勃诺夫－伽辽金法与基于最小总势能原理的里茨法是等价的．但作为近似方法，二者有差别，二者的差别是：在布勃诺夫－伽辽金法中，采用的试探解必须满足全部边界条件；而在里茨法中，试探解不需要满足自然边界条件．在本例题中，条件 $M(1) = 0$ 是自然边界条件．

(4) 最小二乘法

最小二乘法选择的权函数是

$$W_i(x) = \frac{\partial R_N}{\partial c_i} \tag{11.3-16}$$

这样

$$\int_0^1 R_N(x) \frac{\partial R_N}{\partial c_i} \mathrm{d}x = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{11.3-17}$$

(11.3－17)式是残量乘方之和为极小的必要条件，即

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^1 R_N^2 \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 R_N \frac{\partial R_N}{\partial c_i} \mathrm{d}x = 0 \tag{11.3-18}$$

(5) 矩量法

矩量法选择的权函数是

$$W_i(x) = x^{i-1} \tag{11.3-19}$$

这样

$$\int_0^1 R_N(x) x^{i-1} \mathrm{d}x = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{11.3-20a}$$

在本例题中，$w_N(x)$ 和 $R_N(x)$ 是 x 的对称函数，因此，在(11.3－20a)式中，只需采用 x 的偶次幂，这样，(11.3－20a)式可修正为

$$\int_0^1 R_N(x) x^{2(i-1)} \mathrm{d}x = 0 \tag{11.3-20b}$$

为了便于比较上述不同方法得出的结果,取试探解如(11.2-7)的形式:

$$\left.\begin{aligned} w_1(x) &= c_1 w_0(x) \\ w_0(x) &= -\frac{1}{24}(5-x^2)(1-x^2) \end{aligned}\right\} \tag{11.3-21}$$

则残量

$$R_1(x, c_1) = -c_1 - \alpha \frac{c_1}{24}(5-x^2)(1-x^2) + 1 \tag{11.3-22}$$

下面应用不同的方法列出消除残量的方程,以求出参数 c_1.

(1) 配点法

在 $x=0$ 点,$R_1(0, c_1) = -c_1 - \frac{5\alpha}{24}c_1 + 1 = 0$

$$c_1 = \left(1 + \frac{5\alpha}{24}\right)^{-1} \tag{11.3-23a}$$

(2) 子域法

$$\int_0^1 R_1 \mathrm{d}x = -c_1 - \frac{2\alpha}{15}c_1 + 1 = 0$$

$$c_1 = \left(1 + \frac{2\alpha}{15}\right)^{-1} \tag{11.3-23b}$$

(3) 布勃诺夫-伽辽金法

$$\int_0^1 R_1(x) w_0(x) \mathrm{d}x = 0$$

$$c_1 = \left(1 + \frac{31\alpha}{189}\right)^{-1} \tag{11.3-23c}$$

(4) 最小二乘法

$$\frac{\partial R_1}{\partial c_1} = -1 - \frac{\alpha}{24}(5-x^2)(1-x^2)$$

$$\int_0^1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial c_1} \mathrm{d}x = 0$$

$$c_1 = \left(1 + \frac{2\alpha}{15}\right)\left(1 + \frac{4\alpha}{15} + \frac{62\alpha^2}{2\,835}\right)^{-1} \tag{11.3-23d}$$

(5) 矩量法

在本例题中,矩量法所得结果与子域法(2)相同.

以上五种方法取得的结果列表比较如下:

表 11－6 加权残量法的各种方法计算结果的比较

a_0	精确解 $\omega(0)$	配点法	子域法或矩量法	布勃诺夫－伽辽金法	最小二乘法
0	0.208 3	0.208 3	0.208 3	0.208 3	0.208 3
1	0.178 8	0.174 2	0.183 8	0.179 0	0.183 2
10	0.078 36	0.067 57	0.089 29	0.078 91	0.083 04
100	0.011 34	0.009 54	0.014 53	0.011 97	0.058 18
1 000	0.001 025	0.000 995	0.001 551	0.001 262	0.006 068

§ 11.4 有限差分法

有限差分法是一种数值解法，它的基本原理是用差商代替微商，用差分方程代替微分方程，用离散点的集合代替求解域．这样，所讨论问题的基本微分方程和边界条件将被在若干离散点上的差分方程所代替．因此，求解微分方程（线性）的边值问题将转变成求解一组线性代数方程，其结果是给出所求解的问题在求解域内选定的离散点上的数值．

一、差分公式

今以平面问题来说明．在物体的面上以平行于坐标轴的直线建立等间距网格，如图 11－2．设 $f(x,y)$ 为弹性体内各点的某个连续函数，如应力场/位移场/应变场等，这个函数在平行于 x 轴的网线上只随 x 坐标的改变而变化．例如在直线 3－0－1 上，在节点 O 的邻域，函数 f 可以展开成泰勒（Taylor）级数如下：

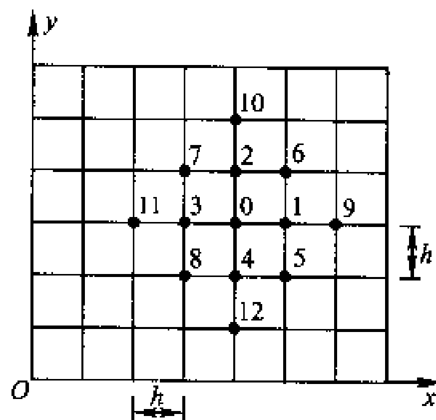


图 11－2

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 (x - x_0)^2 +$$

$$\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 (x-x_0)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0 (x-x_0)^4+\cdots \qquad (11.4-1a)$$

式中

$$f_0=f(x_0),\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0},\cdots \qquad (11.4-1b)$$

在节点3和节点1,x 分别等于 x_0-h 和 x_0+h,应用(11.4-1a)式,在节点3和节点1,函数 f_3 和 f_1 可展开成

$$f_3=f_0-h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0-\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0+\frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0-\cdots$$

$$f_1=f_0+h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0+\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0+\frac{h^4}{24}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0+\cdots$$

设网格划分足够小,即 h 是充分小的量,则在上述 f_3、f_1 的表示式中可以略去 h^3 以上的项.因此,f_3、f_1 的表示式可以简化为

$$f_3=f_0-h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$$

$$f_1=f_0+h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$$

由以上二式,可得差分公式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=\frac{f_1-f_3}{2h} \qquad (11.4-2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0=\frac{f_1+f_3-2f_0}{h^2} \qquad (11.4-3)$$

同样可得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=\frac{f_2-f_4}{2h} \qquad (11.4-4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0=\frac{f_2+f_4-2f_0}{h^2} \qquad (11.4-5)$$

(11.4-2)~(11.4-5)式是基本的差分公式,由此可以导出其他差分公式:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_0=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_0=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_3}{2h}$$

$$=\frac{1}{4h^2}[(f_6+f_8)-(f_5+f_7)] \qquad (11.4-6)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)_0=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\right]_0=\frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_1+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_3-2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0\right]$$

$$=\frac{1}{h^4}[6f_0-4(f_1+f_3)+(f_9+f_{11})] \qquad (11.4-7)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\right)_0=\frac{1}{h^4}[4f_0-2(f_1+f_2+f_3+f_4)+(f_5+f_6+f_7+f_8)] \qquad (11.4-8)$$

$$\left(\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right)_0=\frac{1}{h^4}[6f_0-4(f_2+f_4)+(f_{10}+f_{12})] \qquad (11.4-9)$$

利用这些差分公式,可以将所讨论的问题的微分方程近似地用若干离散点上的差分方程来表示,这是一组联立线性代数方程.这样,求解微分方程的问题转变成求解联立线性代数方程的问题.下面用例题来说明有限差分法.

二、例题

例 1 弹性基础梁

由于对称,坐标原点定在梁中点,考虑梁的右半长.由§11.2,弹性基础梁的基本微分方程的无量纲形式(11.2-1a)′是

$$\frac{d^4 w}{dx^4}+\alpha w=-1 \quad (0\leqslant x<1) \qquad (11.4-10)$$

将域 $0\leqslant x<1$ 划分为 n 个长度为 $h=\dfrac{1}{n}$ 的子域,如图 11-3 所示.这些子域的端点形成离散点集$(x_0,x_1,\cdots,x_n)$,

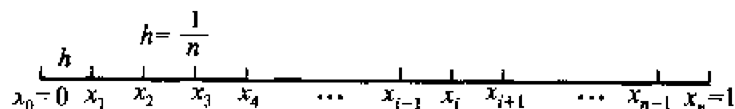


图 11-3

在这些离散点上,梁的挠度和弯矩的近似值是待求的.这些离散点的坐标是

$$x_i=ih \quad (i=0,1,\cdots,n) \qquad (11.4-11a)$$

设在 $x=ih$ 点,梁的挠度以 w_i 表示

$$w_i=w(x_i) \qquad (11.4-11b)$$

若 x_i 是求解域内的点,亦即 $i=0,1,\cdots,n-1$,则由(11.4-2)~(11.4-9)式可知,w 在 x_i 点的前 4 阶导数是:

$$w'_i = \frac{1}{2h}(w_{i+1} - w_{i-1}) \tag{11.4-12a}$$

$$w''_i = \frac{1}{h^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \tag{11.4-12b}$$

$$w'''_i = \frac{1}{2h^3}(w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}) \tag{11.4-12c}$$

$$w''''_i = \frac{1}{h^4}(w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) \tag{11.4-12d}$$

在求解域($0 \leqslant x < 1$)内各个节点 x_i 上($i=0,1,\cdots,n-1$)用(11.4-12d)式近似表示微分方程(11.4-10)中的4阶导数,则可得到 n 个如下形式的差分方程,它们是一组线性代数方程:

$$w_{i-2} - 4w_{i-1} + (6+\alpha h^4)w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2} = -h^4 (i=0,1,\cdots,n-1) \tag{11.4-13}$$

求解这一组线性代数方程,加上边界条件可得到在点 x_i($i=0,1,\cdots,n-1$)上梁的挠度的近似值. 由(11.2-2a)′式可知,弯矩的近似值可应用(11.4-12b)式近似表示,即

$$M_i = -\frac{1}{h^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \tag{11.4-14}$$

当应用方程(11.4-13)于 $x_0=0$ 点,则需要 w_{-2}, w_{-1} 的值,这可由对称条件(11.2-1c)′得

$$w_{-1} = w_1, \quad w_{-2} = w_2 \tag{11.4-15a}$$

当应用方程(11.4-13)于点 $x_{n-1} = 1-h$ 时,需要 w_n 和 w_{n+1} 的值,这可由边界条件(11.2-1b)′得

$$w_n = 0 \tag{11.4-15b}$$

$$M_n = -\frac{1}{h^2}(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) = 0$$

或

$$w_{n+1} = -w_{n-1} \tag{11.4-15c}$$

应用(11.4-15)式,则可得出方程组如下:

若 $n \geqslant 2, h = \frac{1}{n}, i = 0,1,\cdots,n-1$,则

$$\beta = \alpha h^4 = \frac{\alpha}{n^4}$$

$$\boldsymbol{KW} = \boldsymbol{F} \tag{11.4-16a}$$

式中

$$\boldsymbol{W} = -n^4 \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{Bmatrix}_{n\times 1} \qquad (11.4-16b)$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}_{n\times 1} \qquad (11.4-16c)$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(6+\beta) & -4 & 1 & & & & & \\ -4 & (7+\beta) & -4 & 1 & & & 0 & \\ 1 & -4 & (6+\beta) & -4 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & -4 & (6+\beta) & -4 & 1 \\ & 0 & & & 1 & -4 & (6+\beta) & -4 \\ & & & & & 1 & -4 & (5+\beta) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

(11.4-16d)

为得到对称系数矩阵 $\boldsymbol{K}$,在方程组(11.4-13)中的第一个方程($i=0$)应除以2,$\boldsymbol{F}$ 阵中第一个系数为$\frac{1}{2}$.值得注意的是:$\boldsymbol{K}$ 是带状矩阵,因此,方程(11.4-16a)可以很容易地用计算机求解.表11-7列出了 $n=5,10,15,20$ 等分和参数 $\alpha=0,1,10,100,1\,000$ 时方程(11.4-16)的解.表中列出了梁中点($x=0$)的挠度和弯矩值.这些数值解的结果可与表11-2列出的精确解的结果比较.梁中点 $x=0$ 的弯矩值可应用(11.4-14)及(11.4-15)式计算,结果是:

$$M_0 = 2n^2(w_0 - w_1) \qquad (11.4-17)$$

从表11-7中列出的点 $x=0$ 的挠度和弯矩值与表11-2列出的精确解

表 11－7 弹性基础梁的有限差分解

n	$\alpha=0$		$\alpha=1$		$\alpha=10$	
	$-w(0)$	$M(0)$	$-w(0)$	$M(0)$	$-w(0)$	$M(0)$
5	0.210 0	0.5	0.179 8	0.426 2	0.078 14	0.177 7
10	0.208 7	0.5	0.179 1	0.427 0	0.078 30	0.179 1
15	0.208 5	0.5	0.178 9	0.427 1	0.078 33	0.179 4
20	0.208 4	0.5	0.178 9	0.427 2	0.078 34	0.179 5

n	$\alpha=100$		$\alpha=1\,000$	
	$w(0)$	$-M(0)$	$w(0)$	$-M(0)$
5	0.011 23	0.016 64	0.001 026	0.000 563 2
10	0.011 31	0.016 69	0.001 025	0.000 793 3
15	0.011 33	0.016 70	0.001 025	0.000 840 3
20	0.011 33	0.016 71	0.001 025	0.000 857 0

的相应值比较可以看出，n 愈大，即计算域划分的网格愈细，则有限差分法的计算结果愈接近精确解．当然，网格划分越细，即 n 愈大，求解的联立代数方程的数目便越多，计算工作量也随之增大．

例 2 受均布载荷四边固支的板

在均布载荷作用下四边固支板的基本微分方程(11.2－18a)是

$$\nabla^4 w = 1 \quad (-1<x<1,\ -1<y<1) \qquad (11.4-16a)$$

由(11.4－7)～(11.4－9)式可知

$$(\nabla^4 w)_{i,j} = \frac{1}{h^4}\Big[20w_{i,j} - 8(w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1}) + 2(w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) + (w_{i+2,j} + w_{i,j+2} + w_{i-2,j} + w_{i,j-2})\Big] \qquad (11.4-18b)$$

这个计算格式可以用图 11－4 表示，因此本题的差分方程可写成

$$h^4(\nabla^4 w)_{i,j}=h^4 \tag{11.4-19}$$

由于对称性[(11.2－21)式]，只需考虑板的$\frac{1}{8}$部分，如图 11－5，因此，本题还存在以下关系：

$$\left.\begin{aligned} w_{i,j}&=w_{j,i}\\ w_{0,j}&=w_{2,j}\\ w_{-1,j}&=w_{3,j}\\ w_{i,0}&=w_{i,2}\\ w_{i,-1}&=w_{i,3} \end{aligned}\right\} \tag{11.4-20}$$

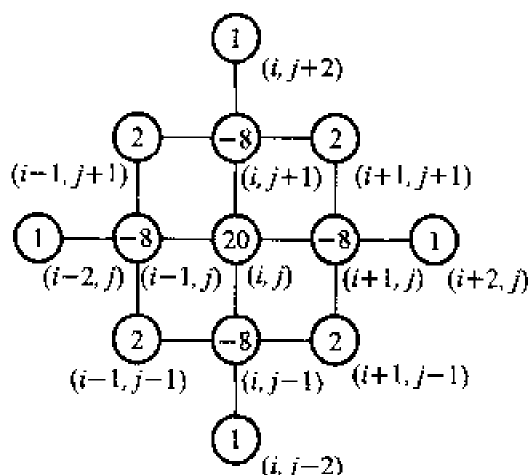


图 11－4

边界条件(11.2－18b)取以下形式：

$$w_{n+1,j}=0 \tag{11.4-21a}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{n+1,j}=\frac{1}{2h}(w_{n+2,j}-w_{n,j})=0$$

或

$$w_{n+2,j}=w_{n,j} \tag{11.4-21b}$$

板中点和板边缘的弯矩 M_x 可应用(11.2－19a)式和(11.4－3)、(11.4－5)式以及(11.4－21)式，由此得出计算式如下：

$$\left.\begin{aligned}&\text{板中点}:M_{xx}(1,1)=-\frac{2}{h^2}(1+\nu)(w_{2,1}-w_{1,1})\\&\text{板边缘}:M_{xx}(n+1,1)=-\frac{2}{h^2}w_{n,1}\end{aligned}\right\}\quad(11.4-22)$$

应用(11.4－19)式于图 11－5 式三角形域内的每一个节点，即 $i=1,2,\cdots,n$ 和 $j=1,2,\cdots,n$，可得一组$\left[\frac{1}{2}n(n+1)\text{个}\right]$关于 $w_{i,j}$ 的线性代数方程. 将这一组代数方程联立求解，可得到 $w_{i,j}$ 的数值. 为应用计算机求解联立代数方程组，可将图 11－5 中三角形域内的节

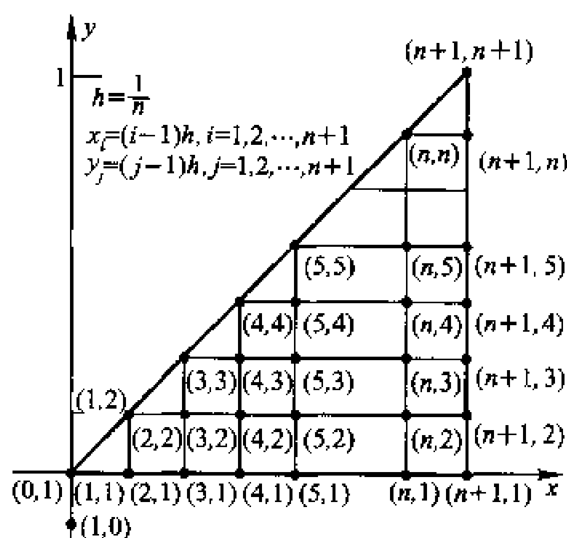


图 11－5 $\frac{1}{8}$板的网格形式

点重新按顺序编号如图 11－6. 这样，本问题的差分方程可写成矩阵形

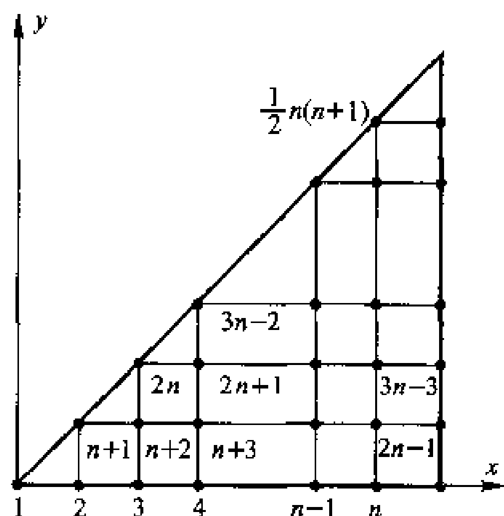


图 11－6 域内节点编号

式：

$$\boldsymbol{KW} = h^4 \boldsymbol{F} \tag{11.4-23a}$$

式中

$$\boldsymbol{W} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w \\ \vdots \\ w_M \end{Bmatrix}_{M\times 1} \quad \boldsymbol{F} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}_{M\times 1} \tag{11.4-23b}$$

上式中 $M = \dfrac{1}{2}n(n+1)$是未知量 w_i 的个数.刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是通过应用(11.4-19)~(11.4-21)于每一个内节点后得出的,它是带状矩阵,但不对称.计算结果见 11-8 表.

表 11-8 四边固支板的有限差分解

n	$w(0,0)$	$M_{xx}(1,0)$	$M_{xx}(0,0)$
2	0.028 79	0.154 5	0.098 60
4	0.022 79	-0.189 5	0.093 75
6	0.021 42	-0.198 0	0.092 62
8	0.020 92	0.201 1	0.092 19
10	0.020 68	-0.202 6	0.091 99
15	0.020 44	0.204 1	0.091 79
20	0.020 35	0.204 7	0.091 71

当网格划分得足够细,即 n 的数量足够大时,本题的有限差分解与 S. Timoshenko & S. Woinowsky-krieger 编著的"Theory of Plates and Shells"第 2 版中列出的解[见本书(11.2-24)式]吻合良好.

§ 11.5 有限元法的基本方程

本节应用变分原理——最小总势能原理,建立有限元法的基本方程.

1. 将弹性体(区域 B)用一些假想的线(对于二维物体)或面(对于三维物体)划分成有限个子区域,这种子区域称为单元,如图 11-7 所示.

2. 选择单元位移场的试探解

单元位移场的试探解 f,也称为位移模型,用矩阵表示为

$$f = N\Delta^e \qquad (11.5-1)$$

式中

$$f = (u \; v \; w)^{\mathrm{T}} \qquad (11.5-2)$$

Δ^e——节点位移列阵(节点自由度),它是待定参数,通过变分原理 $\delta E = 0$ 决定,

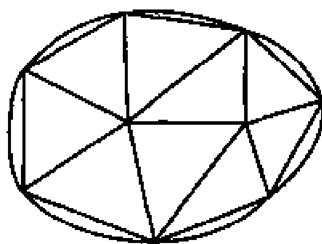


图 11-7

N——"插值函数"(也称"形函数")矩阵,插值函数 N 的选择,在有限元方法中是个关键,要求(1)位移模型在单元内必须连续,相邻单元间的位移必须协调;(2)位移模型必须包含元素的刚体位移;(3)位移模型必须包含单元的常应变状态.例如,三维的四面体元,(11.5-1)式可写成:

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_u^e \\ \Delta_v^e \\ \Delta_w^e \end{Bmatrix} \qquad (11.5-3)$$

式中

$$N_i = (N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4) \qquad (11.5-4)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_u^e &= (u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4)^{\mathrm{T}} \\ \Delta_v^e &= (v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4)^{\mathrm{T}} \\ \Delta_w^e &= (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4)^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \qquad (11.5-5)$$

N_i 为插值函数,或形函数;对于四面体单元(图 11-8)

$$N_1 = L_1, \; N_2 = L_2$$
$$N_3 = L_3, \; N_4 = L_4 \qquad (11.5-6)$$

上式中 L_1, L_2, L_3, L_4 是描写单元内点的位置的"自然坐标",即表示该点相对于节点的位置,这在后面将举例说明.

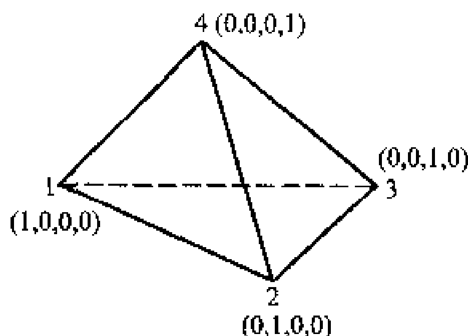


图 11-8

3. 单元的应变场和应力场

单元内任意一点的应变分量列阵为

$$\varepsilon = H_1 f = H_1 N\Delta^e = B\Delta^e \qquad (11.5-7)$$

式中

$$\varepsilon = (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx})^{\mathrm{T}} \qquad (11.5-8)$$

H_1 为一阶微分算子矩阵

$$H_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{11.5-9}$$

单元内任意一点的应力分量列阵为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\varepsilon} = \boldsymbol{DB\Delta}^e \tag{11.5-10}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵，对于均匀各向同性弹性材料，

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & \text{对} & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & \text{称} & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{11.5-11}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx})^{\mathrm{T}} \tag{11.5-12}$$

4．应用最小总势能原理 $\delta E = 0$，建立单元的刚度矩阵和载荷列阵

计算物体的总势能 E．由第十章(10.5-1)式

$$E = \int_B W(\varepsilon_{ij})\,\mathrm{d}V - \int_B F^i u_i \,\mathrm{d}V - \int_{S_1} P^{i*} u_i \,\mathrm{d}S \tag{11.5-13}$$

先计算物体的应变能 U：

$$U=\int_B W(\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V \tag{a}$$

在有限元法中，将整个区域（弹性体）划分为有限个子区域（单元）（图11－7），对每个子区域，可分别选择位移模型（即分片近似），并保持了元素间的协调性，分别建立了各子区域中的 $\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的关系，因此(a)式中的积分可以看成是在不同子区域的总和上进行．由于求和的积分和各个积分的求和是相等的，所以(a)式取以下形式：

$$U=\frac{1}{2}\int_B \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_B\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{\varepsilon}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_e\mathrm{d}V_e$$

$$=\sum_{e=1}^{m}\frac{1}{2}\int_{B_e}\boldsymbol{\varepsilon}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_e\mathrm{d}V_e \tag{b}$$

式中，下标 e 表示子区域（单元），m 是物体划分成单元的总数．将(11.5－7)和(11.5－10)式代入(b)式，可得物体应变能的表示式：

$$U=\sum_{e=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\int_{B_e}(\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DB\Delta}^e\mathrm{d}V_e\right] \tag{11.5－14a}$$

式中，括弧内的表示式是单个单元的应变能．(11.5－14a)式表示：物体（单元的集合）的应变能是全部单元的应变能之和．

然后计算外力（包含体力 F^i 和表面力 P^{i*}）的势能，即(11.5－13)式中的后两项，但以矩阵形式表示，记为 $-V$：

$$-V=-\int_B F^i u_i\mathrm{d}V-\int_{S_1}P^{i*}u_i\mathrm{d}S$$

$$=-\int_B\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V-\int_{S_1}\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^*\mathrm{d}S$$

$$=-\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{B_e}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V_e+\int_{S_{1,e}}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^*\mathrm{d}S_e\right)$$

$$=-\sum_{e=1}^{m}\left(\int_{B_e}(\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V_e+\int_{S_{1,e}}(\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^*\mathrm{d}S_e\right) \tag{11.5－14b}$$

这样，系统的总势能 E：

$$E=U-V$$

$$=\sum_{e=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\int_{B_e}(\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DB\Delta}^e\mathrm{d}V_e-\int_{B_e}(\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V_e-\right.$$

$$\left.\int_{S_{1,e}}(\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^*\mathrm{d}S_e\right)$$

$$= \sum_{e=1}^{m} E_e \tag{11.5-15}$$

式中，E_e 为单元的总势能.(11.5-15)式表示，系统的总势能等于全部单元的总势能之和.单元的总势能为：

$$E_e = \frac{1}{2}\int_{B_e} (\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Delta}^e \mathrm{d}V_e - \int_{B_e} (\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F} \mathrm{d}V_e - \int_{S_{1,e}} (\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}^* \mathrm{d}S_e \tag{11.5-16}$$

应用最小总势能原理 $\delta E = 0$，则由(11.5-15)式，得

$$\delta E = \delta \left(\sum_{e=1}^{m} E_e \right) = \sum_{e=1}^{m} \delta E_e = 0 \tag{11.5-17}$$

δE_e 是完全任意的，互不相关的，因此(11.5-17)式给出：

$$\delta E_e = 0 \quad (e = 1, 2, \cdots, m) \tag{11.5-18}$$

将(11.5-16)式代入(11.5-18)式，得

$$(\delta \boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}} \left(\int_{B_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Delta}^e \mathrm{d}V_e - \int_{B_e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F} \mathrm{d}V_e - \int_{S_{1,e}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}^* \mathrm{d}S_e \right) = 0 \tag{11.5-19}$$

节点位移变分$(\delta \boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}$ 是任意的，因此(11.5-19)式中括弧内的表示式必须为 0，即

$$\int_{B_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Delta}^e \mathrm{d}V_e - \int_{B_e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F} \mathrm{d}V_e - \int_{S_{1,e}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}^* \mathrm{d}S_e = 0 \tag{11.5-20}$$

定义单元的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 和载荷列阵 $\boldsymbol{F}^e$ 分别为

$$\boldsymbol{K}^e = \int_{B_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d}V_e \tag{11.5-21}$$

$$\boldsymbol{F}^e = \int_{B_e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F} \mathrm{d}V_e + \int_{S_{1,e}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}^* \mathrm{d}S_e \tag{11.5-22}$$

将(11.5-21)及(11.5-22)式代入(11.5-20)式，给出单元的特性方程：

$$\boldsymbol{K}^e \boldsymbol{\Delta}^e = \boldsymbol{F}^e \tag{11.5-23}$$

最小总势能原理与静力平衡方程是等价的，因此(11.5-23)式是单元的平衡方程.

5. 单元的集合

上一节将最小总势能原理应用于单元，推导出单元的刚度矩阵，载荷

列阵和单元的平衡方程. 下面,应用变分原理 $\delta E=0$ 于单元的集合体.

设集合体中单元的总数为 m,集合体的节点自由度(节点位移分量)的总数为 N,可以写成 $N\times 1$ 列阵 $\boldsymbol{\Delta}^t_{N\times 1}$. 将单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 和单元载荷列阵 $\boldsymbol{F}^e$ 扩大,分别写成 $N\times N$ 方阵 $\boldsymbol{K}^e$ 和 $N\times 1$ 列阵 $\boldsymbol{R}^e$,方法是将已知的单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 的项和载荷列阵 $\boldsymbol{F}^e$ 的项放到它们在扩大的矩阵/列阵的相应位置上,其余的位置用 0 补充. 例如,第 e 个单元的 $N\times 1$ 载荷列阵 $\boldsymbol{R}^e$ 对应于第 4 小节中的单元载荷列阵 $\boldsymbol{F}^e$ 可以表示为

$$(\boldsymbol{R}^e)^{\mathrm{T}}=(0\quad 0\quad 0\quad\cdots\quad 0\quad(\boldsymbol{F}^e)^{\mathrm{T}}\quad 0\quad\cdots\quad 0)_{1\times N}\tag{11.5-24}$$

载荷列阵 $\boldsymbol{F}^e$ 在总载荷列阵 $\boldsymbol{R}^e$ 中的位置,对应于元素 e 的节点位移 $\boldsymbol{\Delta}^e$ 在 $\boldsymbol{\Delta}^t$ 中的位置. 这样,应用(11.5-21),(11.5-22)式,单元的总势能 E_e (11.5-16)式可写成:

$$\begin{aligned}E_e&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}_{1\times n}\boldsymbol{K}^e_{n\times n}\boldsymbol{\Delta}^e_{n\times 1}-(\boldsymbol{\Delta}^e)^{\mathrm{T}}_{1\times n}\boldsymbol{F}^e_{n\times 1}\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}_{1\times N}\boldsymbol{K}_{N\times N}\boldsymbol{\Delta}^t_{N\times 1}-(\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}_{1\times N}\boldsymbol{R}^e_{N\times 1}\end{aligned}\tag{11.5-25}$$

式中,n 和 N 分别是单元 e 和单元集合体的节点位移数目. 这样,集合体的总势能(11.5-15)式可写成

$$\begin{aligned}E&=\sum_{e=1}^{m}E_e=\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{m}(\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}^t-\sum_{e=1}^{m}(\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^e\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\left[\left(\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{K}^e\right)\boldsymbol{\Delta}^t-2\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{R}^e\right]\end{aligned}\tag{11.5-26}$$

将最小总势能原理 $\delta E=0$ 应用于集合体,

$$\delta E=(\delta\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}\left[\left(\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{K}^e\right)\boldsymbol{\Delta}^t-\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{R}^e\right]=0\tag{11.5-27}$$

$(\delta\boldsymbol{\Delta}^t)^{\mathrm{T}}$ 是任意的,(11.5-27)式 $\delta E=0$ 要求括弧中的表达式等于 0,这样有

$$\left(\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{K}^e\right)\boldsymbol{\Delta}^t=\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{R}^e\tag{11.5-28}$$

这就是集合体的平衡方程式,可以写成

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Delta}^t=\boldsymbol{F}^t\tag{11.5-29}$$

式中

$$\boldsymbol{K}=\sum_{e=1}^{m}\boldsymbol{K}^e\text{——集合体的刚度矩阵}\tag{11.5-30}$$

$$F' = \sum_{e=1}^{m} R^e \text{——集合体的载荷列阵} \tag{11.5-31}$$

对平衡方程(11.5-29)作考虑边界条件的修正，然后求解方程组，得出节点的位移列阵。由此，可以求出物体的位移场。得到了位移，我们便可以计算任一单元的应力和应变，这样便完成了分析工作。

从以上的讨论可以看出：有限元法和里茨法本质上是相同的，两种方法都采用一组试函数作为求近似解的起点；两种方法都采用试函数的线性组合；两种方法都应用能量泛函驻值条件来求解试探解中的待定参数。两种方法的主要差别在于，在有限元法中，选择的试函数不是在物体的全域定义，不需要满足边界条件，只需满足一些连续条件；而里茨方法选择的试函数是在物体的全域定义，因此，它只能应用于几何形状比较简单的物体。在有限元法中，单元取简单的几何形状，而具有简单几何形状的单元的集合可以表示非常复杂的几何形状的物体，因此，有限元法比里茨法有更广泛的适用性。

6. 自然坐标

自然坐标是描写单元内点的位置的局部坐标。

单元内任一点的自然坐标是表示该点相对于单元节点的位置，自然坐标是无量纲量，它们的大小在 1－0 之间变化。

例 1 线元的自然坐标(图 11-9)

单元内任一点 P 的自然坐标 L_1, L_2 由下式确定：

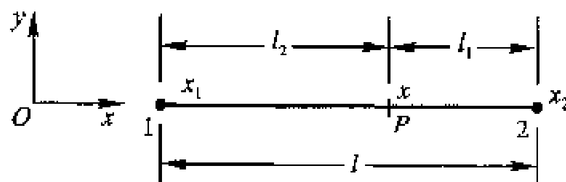


图 11-9

$$L_1 = l_1/l, \quad L_2 = l_2/l \tag{11.5-32}$$

$$L_1 + L_2 = 1 \tag{11.5-33}$$

在节点 1：$L_1 = 1$、$L_2 = 0$ 在节点 2：$L_1 = 0$，$L_2 = 1$ 由此可知：单元内任一点 P 的自然坐标表示该点相对于单元节点 1、2 的位置。自然坐标的值在某一节点上为 1，则在其余节点上为 0。

例 2 四面体元(四节点)(图 11-10)单元内任一点的自然坐标，由该点(例如 P 点)与三个节点所形成的小四面体元的体积与单元的体积之比所确定：

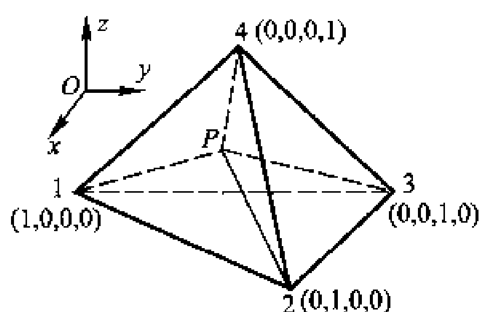


图 11-10

$$L_1 = V_1/V, \quad L_2 = V_2/V, \quad L_3 = V_3/V, \quad L_4 = V_4/V \tag{11.5-34}$$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{11.5-35}$$

$$V_1 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$V_3 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x & y & z \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}, \quad V_4 = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} \tag{11.5-36}$$

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \tag{11.5-37}$$

7. 有限元法自 20 世纪 50 年代出现，经历半个世纪，已取得飞速的发展，成为结构分析(更广泛的说是数值方法)的有力工具. 在本课程范围内，不可能对有限元法作全面的讨论，本节只是从变分原理出发建立有限元法基本方程. 关于有限元法的全面的论述，建议读者阅读有关专著.

习 题

1. 应用里茨法，从下列试探解中，选择弹性基础梁(见 §11.2 例 1)的最佳近似

解.

(a) $w_1(x)=a_1(1-x^2)$

(b) $w_2(x)=w_0(x)(a_1+a_2x^2)$

式中 $w_0(x)=-\frac{1}{24}(5-x^2)(1-x^2)$

2. 应用里茨法,求在均布载荷作用下四边固支方板(见§11.2 例 2)的近似解.设试探解的形式为:$w_1(x)=a_1(1-x^2)^2(1-y^2)^2$

3. 采用习题 2 的试探解,应用加权残量法中的不同方法决定系数 a_1,并对结果加以比较.

4. 试证明:对于弹性基础梁,若采用的试探解满足全部边界条件,则应用里茨法和布勃诺夫-伽辽金法会得到相同的结果.

附录　公式汇编

现将本书导出的公式汇编于后，以便读者查考．公式的编号与正文中的相同，专用名词后均附有英文名词．

一、张量分析公式

指标的范围(Range of an index)

拉丁字母指标 $i、j、k、\cdots=1,2,3$

希腊字母指标 $\alpha、\beta、\gamma、\cdots=1,2$

求和约定(Summation convention)

$$a_i x^i=\sum_i a_i x^i \qquad (1.2-2)(1.2-3)$$

克罗内克符号(Kronecker delta)

$$\delta_j^k=\begin{cases}1 & 若\ j=k\\ 0 & 若\ j\neq k\end{cases} \qquad (1.2-4)$$

置换符号(Permutation symbol)

$$e_{ijk}=e^{ijk}=\begin{cases}+1 & 当\ i、j、k\ 是\ 1、2、3\ 的偶置换;\\ -1 & 当\ i、j、k\ 是\ 1、2、3\ 的奇置换;\\ 0 & 当\ i、j、k\ 的任意两个指标相同.\end{cases} \qquad (1.2-8)$$

置换张量(Permutation tensor)

$$\in_{ijk}=\sqrt{g}e_{ijk} \qquad (1.9-6)$$

$$\in^{ijk}=e^{ijk}/\sqrt{g} \qquad (1.9-7)$$

$$\in^{rst}\in_{lmn}=\delta_l^r\delta_m^s\delta_n^t-\delta_l^r\delta_n^s\delta_m^t+\delta_n^r\delta_l^s\delta_m^t-\delta_n^r\delta_m^s\delta_l^t+\delta_m^r\delta_n^s\delta_l^t-\delta_m^r\delta_l^s\delta_n^t \qquad (1.9-17)$$

$$\in^{rst}\in_{rmn}=\delta_m^s\delta_n^t-\delta_n^s\delta_m^t \qquad (1.9-18)$$

$$\in^{rst}\in_{rsn}=2\delta_n^t \qquad (1.9-19)$$

$$\in^{rst}\in_{rst}=6 \qquad (1.9-20)$$

二维置换张量(2-dimensional Permutation tensor)

$$\in_{\alpha\beta3}=\in_{\alpha\beta} \qquad (1.9-24)$$

$$\in_{12} = -\in_{21} = \sqrt{g}, \quad \in_{11} = \in_{22} = 0 \tag{1.9-25}$$

$$\in^{\alpha\beta 3} = \in^{\alpha\beta} \tag{1.9-26}$$

$$\in^{12} = -\in^{21} = 1/\sqrt{g}, \in^{11} = \in^{22} = 0 \tag{1.9-27}$$

$$\in^{\alpha\beta}\in_{\gamma\delta} = \delta_\gamma^\alpha \delta_\delta^\beta - \delta_\delta^\alpha \delta_\gamma^\beta \tag{1.9-31}$$

$$\in^{\alpha\beta}\in_{\alpha\gamma} = \delta_\gamma^\beta \tag{1.9-32}$$

$$\in^{\alpha\beta}\in_{\alpha\beta} = 2 \tag{1.9-33}$$

行列式(Determinant)

$$a = |a_j^i| = e_{rst} a_1^r a_2^s a_3^t \tag{1.2-9a}$$

$$a e_{lmn} = e_{rst} a_l^r a_m^s a_n^t \tag{1.2-9b}$$

$$a \in_{lmn} = \in_{rst} a_l^r a_m^s a_n^t \tag{1.9-14}$$

$$6a = a_l^r a_m^s a_n^t \in_{rst} \in^{lmn} \tag{1.9-21}$$

基矢量(Base vectors)

$$\boldsymbol{g}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^k} = \frac{\partial z^j}{\partial x^k}\boldsymbol{i}_j \quad (k = 1,2,3) \tag{1.4-4}$$

$$\boldsymbol{g}^r \cdot \boldsymbol{g}_s = \delta_s^r \tag{1.6-1}$$

$$\boldsymbol{V} = v^r \boldsymbol{g}_r = v_s \boldsymbol{g}^s \tag{1.6-10}$$

$$V^s = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{g}^s \tag{1.6-13}$$

$$V_r = \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{g}_r \tag{1.6-14}$$

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{g}^r)\boldsymbol{g}_r \tag{1.6-15}$$

$$\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{g}_s)\boldsymbol{g}^s \tag{1.6-16}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}_k \mathrm{d}x^k \tag{1.4-5}$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}_k(\bar{x}) = \boldsymbol{g}_j(x)\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \tag{1.4-8}$$

$$\bar{\boldsymbol{g}}^k(\bar{x}) = \boldsymbol{g}^l(x)\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \tag{1.6-20}$$

度量张量(Metric tensors)

$$g_{km} = \boldsymbol{g}_k \cdot \boldsymbol{g}_m \tag{1.5-1}$$

$$g_{km} = \delta_{ij}\frac{\partial z^i}{\partial x^k}\frac{\partial z^j}{\partial x^m} \tag{1.5-3}$$

$$\mathrm{d}s^2 = g_{km}\mathrm{d}x^k \mathrm{d}x^m \tag{1.5-2}$$

$$g^{rs} = \boldsymbol{g}^r \cdot \boldsymbol{g}^s \tag{1.6-3}$$

$$g^{rm}g_{ms} = \delta_s^r \quad (1.6-5)$$

$$g^{rs} = \frac{D^{rs}}{g} \quad (1.6-6)$$

$$g = |g_{ij}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \quad (1.6-7)$$

$D^{rs} = |g_{ij}|$ 中元素 g_{rs} 的代数余子式

$$g_j^i = \delta_j^i \quad (1.9-5)$$

$$\boldsymbol{g}^r = g^{rs}\boldsymbol{g}_s \quad (1.6-2)$$

$$\boldsymbol{g}_r = g_{rs}\boldsymbol{g}^s \quad (1.6-8)$$

$$\bar{g}_{ln}(\bar{x}) = g_{km}(x)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^n} \quad (1.5-9)$$

$$\bar{g}^{ln}(\bar{x}) = g^{km}(x)\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^m} \quad (1.6-21)$$

张量(Tensors)

$$\bar{A}^i(\bar{x}) = A^k(x)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \quad (1.8-2)$$

$$\bar{A}_i(\bar{x}) = A_k(x)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \quad (1.8-4)$$

$$\bar{A}^{ij}(\bar{x}) = A^{mn}(x)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \quad (1.8-6)$$

$$\bar{A}_{ij}(\bar{x}) = A_{mn}(x)\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \quad (1.8-7)$$

$$\bar{A}^i{}_{\cdot j}(\bar{x}) = A^m{}_{\cdot n}(x)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \quad (1.8-8)$$

$$\bar{A}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{k_p}}\frac{\partial x^{m_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{m_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}}A^{k_1\cdots k_p}_{m_1\cdots m_q} \quad (1.8-9)$$

指标的提升和下降(Raising and lowering of indices)

$$V_r = g_{rs}V^s,\quad V^r = g^{rs}V_s \quad (1.6-11),(1.6-12)$$

$$A^k{}_{\cdot l} = g^{mk}A_{ml},\quad A_l{}^{\cdot k} = g^{km}A_{lm} \quad (2.5-1),(2.5-2)$$

$$A^{kl} = g^{km}g^{ln}A_{mn} \quad (2.5-3)$$

$$\left.\begin{aligned} &A_l^{k\cdot} = g_{lm}A^{km},\quad A_l{}^{\cdot k} = g_{lm}A^{mk} \\ &A_{kl} = g_{km}g_{ln}A^{mn} \end{aligned}\right\} \quad (2.5-4)$$

矢量的标量积(Scalar product)

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u^i v_i = u_j v^j = u_i v_j g^{ij} = u^i v^j g_{ij} \qquad (1.11-1),(1.11-2)$$

矢量的矢量积(Vector product)

$$\boldsymbol{g}_i \times \boldsymbol{g}_j = \in_{ijk} \boldsymbol{g}^k \qquad (1.11-4)$$

$$\boldsymbol{g}^i \times \boldsymbol{g}^j = \in^{ijk} \boldsymbol{g}_k \qquad (1.11-5)$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = A^i B^j \in_{ijk} \boldsymbol{g}^k \qquad (1.11-6)$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = A_i B_j \in^{ijk} \boldsymbol{g}_k \qquad (1.11-8)$$

矢量的混合积(Scalar triple product)

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = A^i B^j C^k \in_{ijk} \qquad (1.11-15)$$

$$\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2 \cdot \boldsymbol{g}_3 = \sqrt{g} \qquad (1.11-17)$$

$$\boldsymbol{g}^1 \times \boldsymbol{g}^2 \cdot \boldsymbol{g}^3 = 1/\sqrt{g} \qquad (1.11-18)$$

矢量的三重矢量积(Vector triple product)

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \qquad (1.11-20)$$

矢量的物理分量(physical components of vectors)

$$\boldsymbol{V} = V^{(r)} \boldsymbol{e}_r = V_{(r)} \boldsymbol{e}^r \qquad (2.7-3)$$

$$V^{(r)} = V^r \sqrt{g_{\underline{r}\underline{r}}} \qquad (2.7-5)$$

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{g}_r}{\sqrt{g_{\underline{r}\underline{r}}}} \qquad (2.7-4)$$

$$\left.\begin{aligned} V_{(r)} &= V_r \sqrt{g^{\underline{r}\underline{r}}} \\ \boldsymbol{e}^r &= \frac{\boldsymbol{g}^r}{\sqrt{g^{\underline{r}\underline{r}}}} \end{aligned}\right\} \qquad (2.7-2)$$

普通偏导数(Partial derivative)

$$\boldsymbol{u}_{,i} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x^i},\ u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \qquad (3.1-1)$$

克里斯托费尔符号(Christoffel symbol)

$$\boldsymbol{g}_{i,j} = \Gamma_{ijk} \boldsymbol{g}^k = \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{g}_k \qquad (3.1-2)$$

$$\boldsymbol{g}^i_{,j} = -\Gamma^i_{jk} \boldsymbol{g}^k \qquad (3.1-11)$$

$$\boldsymbol{g}_{i,j} \cdot \boldsymbol{g}_k = \Gamma_{ijk},\ \boldsymbol{g}_{i,j} \cdot \boldsymbol{g}^k = \Gamma^k_{ij} \qquad (3.1-3)$$

$$\Gamma_{ijk} g^{kl} = \Gamma^l_{ij},\ \Gamma^k_{ij} g_{kl} = \Gamma_{ijl} \qquad (3.1-4)$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik},\ \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \qquad (3.1-6)$$

$$g_{ij,k} = \Gamma_{ikj} + \Gamma_{jki} \tag{3.1-7}$$

$$2\Gamma_{ijk} = g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k} \tag{3.1-8a}$$

$$2\Gamma^k_{ij} = g^{kl}(g_{jl,i} + g_{li,j} - g_{ij,l}) \tag{3.1-8b}$$

协变导数(Covariant derivative)

$$\boldsymbol{V}_{,j} = V^i|_j \boldsymbol{g}_i = V_i|_j \boldsymbol{g}^i \qquad (3.3-1),(3.3-3)$$

$$V^i|_j = V^i_{,j} + V^k \Gamma^i_{jk} \tag{3.3-2}$$

$$V_i|_j = V_{i,j} - V_k \Gamma^k_{ij} \tag{3.3-4}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{V} = V^i|_j \boldsymbol{g}_i \mathrm{d}x^j = V_i|_j \boldsymbol{g}^i \mathrm{d}x^j \tag{3.3-5}$$

$$\left.\begin{aligned} V_i|_j g^{ik} = V^k|_j, \quad V^i|_j g_{ik} = V_k|_j \\ V_i|^k = V_i|_j g^{kj}, \quad V^i|^k = V^i|_j g^{jk} \end{aligned}\right\} \tag{3.3-8}$$

$$\phi_{,i} = \phi|_i \tag{3.3-10}$$

$$A_{ij}|_k = A_{ij,k} - A_{lj}\Gamma^l_{ik} - A_{il}\Gamma^l_{kj} \tag{3.4-2}$$

$$A^i_{\cdot j}|_k = A^i_{\cdot j,k} + A^l_{\cdot j}\Gamma^i_{kl} - A^i_{\cdot l}\Gamma^l_{jk} \tag{3.4-3}$$

$$A_i^{\cdot j}|_k = A_{i\cdot,k}^{\cdot j} - A_l^{\cdot j}\Gamma^l_{ik} + A_i^{\cdot l}\Gamma^j_{kl} \tag{3.4-4}$$

$$A^{ij}|_k = A^{ij}_{,k} + A^{lj}\Gamma^i_{kl} + A^{il}\Gamma^j_{kl} \tag{3.4-5}$$

$$\begin{aligned} A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}|_k = {} & A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q,k} + A^{l i_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\Gamma^{i_1}_{lk} + \cdots + \\ & A^{i_1\cdots i_{p-1} l}_{j_1\cdots j_q}\Gamma^{i_p}_{lk} - A^{i_1 i_2\cdots i_p}_{l j_2\cdots j_q}\Gamma^l_{j_1 k} - \cdots - \\ & A^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{q-1} l}\Gamma^l_{j_q k} \end{aligned} \tag{3.4-6}$$

特殊张量(Special tensors)的协变导数

$$g_{ij}|_k = 0, \quad g^{ij}|_k = 0 \tag{3.5-2}$$

$$\in_{ijk}|_l = 0, \quad \in^{ijk}|_l = 0 \tag{3.5-3}$$

二阶协变导数(Second－order covariant derivative)

$$\begin{aligned} A_k|_{lm} = {} & A_{k,lm} - \Gamma^r_{kl,m}A_r - A_{r,m}\Gamma^r_{kl} - A_{r,l}\Gamma^r_{km} + \\ & A_s\Gamma^s_{rl}\Gamma^r_{km} - A_{k,r}\Gamma^r_{ml} + A_s\Gamma^s_{kr}\Gamma^r_{ml} \end{aligned} \tag{3.8-2}$$

梯度、散度、旋度(Gradient、Divergence、curl)

$$\nabla = \boldsymbol{g}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{3.6-1}$$

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \phi|_k \boldsymbol{g}^k \tag{3.6-2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A} = A^k|_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{g}A^k) \tag{3.6-4}$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \in^{klm} A_l|_k \boldsymbol{g}_m \tag{3.6-6}$$

$$\nabla^2 \phi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\phi) = \phi|_k^k \tag{3.6-9}$$

积分定理(Integral theorems)

高斯定理(Gauss theorem)

$$\int_V \mathrm{div}\boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \int_S \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.7-1}$$

$$\int_V u^l|_l \in_{ijk} \mathrm{d}r^i \mathrm{d}s^j \mathrm{d}t^k = \int_S u^l \mathrm{d}A_l \tag{3.7-2}$$

斯托克斯定理(Stokes' theorem)

$$\oint_l \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_A \mathrm{curl}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A} \tag{3.7-3}$$

$$\oint_c u_i \mathrm{d}x^i = \int_A \in^{ijk} u_i|_j \mathrm{d}A_k \tag{3.7-4}$$

平面格林定理(Green's theorem in the plane)

$$\int_A \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} + \frac{\partial u_2}{\partial z_2}\right)\mathrm{d}A = \oint_c (u_1 n_1 + u_2 n_2)\mathrm{d}s \tag{3.7-6}$$

黎曼-克里斯托费尔张量(Riemann-Christoffel tensor)

$$R^r{}_{\cdot klm} = \Gamma^r_{km,l} - \Gamma^r_{kl,m} + \Gamma^r_{sl}\Gamma^s_{km} - \Gamma^r_{sm}\Gamma^s_{kl} \tag{3.8-4}$$

$$R_{klmn} = g_{kr} R^r{}_{\cdot lmn} \tag{3.8-7}$$

$$= \frac{1}{2}(g_{kn,lm} + g_{lm,kn} - g_{km,ln} - g_{ln,km}) + g^{rs}(\Gamma_{lmr}\Gamma_{kns} - \Gamma_{lns}\Gamma_{kmr}) \tag{3.8-9}$$

两点张量场(Two-point tensor field)

$$\bar{A}^k_K(\bar{x}, \bar{X}) = A^m_M(x, X)\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^m}\frac{\partial X^M}{\partial \bar{X}^K} \tag{3.9-2}$$

两点张量场的全协变导数(Total covariant differentiation of a two-point tensor field)

$$A^k_{K:L} = \frac{\partial A^k_K}{\partial X^L} - \Gamma^M_{LK}A^k_M + \left(\frac{\partial A^k_K}{\partial x^l} + \Gamma^k_{lm}A^m_K\right)\frac{\partial x^l}{\partial X^L} \tag{3.9-9}$$

$$(A^k_K B^L_l)_{:M} = A^k_{K:M} B^L_l + A^k_K B^L_{l:M} \tag{3.9-11}$$

$$g_{kl:M} = g^k_{K:M} = G_{KL:m} = 0 \tag{3.9-12}$$

二、常用的曲线坐标系

(一) 圆柱坐标系(Cylindrical coordinate system)

$x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = z$(图 1－4)

基矢量(Base vectors)

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{i}_1\cos\theta + \boldsymbol{i}_2\sin\theta, \qquad |\boldsymbol{g}_1| = 1$$

$$\boldsymbol{g}_2 = -\boldsymbol{i}_1 r\sin\theta + \boldsymbol{i}_2 r\cos\theta, \qquad |\boldsymbol{g}_2| = r \tag{1.7-7}$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{i}_3, \qquad |\boldsymbol{g}_3| = 1$$

基本度量张量(Fundamental metric tensors)

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = 1 \tag{1.7-8}$$

$$g_{12} = g_{23} = g_{13} = 0$$

$$g = r^2 \tag{1.7-9}$$

相伴度量张量(Associated metric tensors)

$$g^{11} = 1,\ g^{22} = 1/r^2,\ g^{33} = 1 \tag{1.7-10}$$

$$g^{12} = g^{23} = g^{13} = 0$$

对偶基矢量(Reciprocal base vectors)

$$\boldsymbol{g}^1 = \boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}^2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{r^2},\ \boldsymbol{g}^3 = \boldsymbol{g}_3 \tag{1.7-11}$$

$$|\boldsymbol{g}^1| = 1, |\boldsymbol{g}^2| = 1/r, |\boldsymbol{g}^3| = 1$$

克里斯托费尔符号(Christoffel symbol)

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = r,\ \Gamma_{221} = -r, \text{所有其他的 } \Gamma_{klm} = 0 \tag{3.2-3}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r,\ \Gamma_{22}^1 = -r, \text{所有其他的 } \Gamma_{kl}^m = 0 \tag{3.2-4}$$

(二) 球坐标系(Spherical coordinate system)(图 1－5)

$$x^1 = r,\ x^2 = \varphi,\ x^3 = \theta$$

基矢量

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{i}_1\sin\varphi\cos\theta + \boldsymbol{i}_2\sin\varphi\sin\theta + \boldsymbol{i}_3\cos\varphi$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{i}_1 r\cos\varphi\cos\theta + \boldsymbol{i}_2 r\cos\varphi\sin\theta - \boldsymbol{i}_3 r\sin\varphi \tag{1.7-14}$$

$$\boldsymbol{g}_3 = -\boldsymbol{i}_1 r\sin\varphi\sin\theta + \boldsymbol{i}_2 r\sin\varphi\cos\theta$$

$$|\boldsymbol{g}_1| = 1,\ |\boldsymbol{g}_2| = r,\ |\boldsymbol{g}_3| = r\sin\varphi$$

基本度量张量

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33} = r^2\sin^2\varphi$$

$$g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0 \tag{1.7-15}$$

$$g = r^4\sin^2\varphi$$

相伴度量张量

$$g^{11}=1,\ g^{22}=1/r^2,\ g^{33}=\frac{1}{r^2\sin^2\varphi} \qquad (1.7-17)$$

$$g^{12}=g^{13}=g^{23}=0$$

对偶基矢量

$$\boldsymbol{g}^1=\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}^2=\boldsymbol{g}_2/r^2,\ \boldsymbol{g}^3=\frac{\boldsymbol{g}_3}{r^2\sin^2\varphi} \qquad (1.7-18)$$

$$|\boldsymbol{g}^1|=1,\ |\boldsymbol{g}^2|=1/r,\ |\boldsymbol{g}^3|=\frac{1}{r\sin\varphi}$$

克里斯托费尔符号

$$\Gamma_{122}=-\Gamma_{221}=r,\ \Gamma_{133}=-\Gamma_{331}=r\sin^2\varphi \qquad (3.2-5)$$

$$\Gamma_{233}=-\Gamma_{332}=r^2\sin\varphi\cos\varphi,\ \text{所有其他的}\ \Gamma_{klm}=0$$

$$\Gamma_{22}^1=-r,\Gamma_{33}^1=-r\sin^2\varphi,\ \Gamma_{12}^2=\Gamma_{13}^3=1/r$$

$$\Gamma_{33}^2=-\sin\varphi\cos\varphi,\ \Gamma_{23}^3=\cot\varphi \qquad (3.2-6)$$

所有其他的 $\Gamma_{kl}^m=0$

(三) 正交曲线坐标系(Orthogonal curvilinear coordinate system)

基本度量张量

$$g_{ij}=\begin{cases}(H_i)^2 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases} \qquad (1.7-1)$$

$$g=g_{11}g_{22}g_{33}=(H_1H_2H_3)^2 \qquad (1.7-2)$$

相伴度量张量

$$g^{\underline{i}\,\underline{i}}=\frac{1}{g_{\underline{i}\,\underline{i}}}=\frac{1}{(H_i)^2}(i\ \text{不求和}) \qquad (1.7-3)$$

$$g^{ij}=0(i\neq j) \qquad (1.7-4)$$

对偶基矢量

$$\boldsymbol{g}^k=g^{\underline{k}\,\underline{k}}\boldsymbol{g}_k(k\ \text{不求和}) \qquad (1.7-5)$$

克里斯托费尔符号

$$\Gamma_{\underline{j}\,\underline{j}i}=-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\underline{j}\,\underline{j}}}{\partial x^i},\Gamma_{\underline{j}i\underline{j}}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\underline{j}\,\underline{j}}}{\partial x^i}$$

$$\Gamma_{\underline{i}\,\underline{i}\,\underline{i}}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\underline{i}\,\underline{i}}}{\partial x^i},\Gamma_{ijk}=0(i\neq j\neq k) \qquad (3.2-1)$$

$$\Gamma_{\underline{l}\,\underline{l}}^i=-\frac{1}{2g_{\underline{i}\,\underline{i}}}\frac{\partial g_{ll}}{\partial x^i},\Gamma_{li}^l=\frac{\partial}{\partial x^i}(\ln\sqrt{g_{ll}})$$

$$\Gamma_{ii}^{i} = \frac{\partial}{\partial x^{j}}(\ln\sqrt{g_{ii}}), \Gamma_{ij}^{k} = 0(i \neq j \neq k) \quad (3.2-2)$$

（四）平面极坐标系(Plane polar coordinate system)

$$x^1 = r, x^2 = \theta$$

平面极坐标系是圆柱坐标系的特例，即 $x^3 = 0$. 因此，圆柱坐标系中的公式都适用，只须令 $\boldsymbol{g}_3 = 0$

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{i}_1\cos\theta + \boldsymbol{i}_2\sin\theta, |\boldsymbol{g}_1| = 1$$

$$\boldsymbol{g}_2 = -\boldsymbol{i}_1 r\sin\theta + \boldsymbol{i}_2 r\cos\theta, |\boldsymbol{g}_2| = r$$

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g = r^2$$

$$g^{11} = 1, g^{22} = \frac{1}{r^2}, g^{12} = g^{21} = 0$$

$$\boldsymbol{g}^1 = \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}^2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{r^2}$$

$$\Gamma_{122} = \Gamma_{212} = r, \Gamma_{221} = -r$$

所有其他的 $\Gamma_{klm} = 0$

$$\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{r}, \Gamma_{22}^{1} = -r$$

所有其他的 $\Gamma_{kl}^{m} = 0$

三、弹性力学公式

力矩(Moment of a force)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = r^i F^j \in_{ijk} \boldsymbol{g}^k \quad (1.11-13)$$

应力张量(Stress tensor)

$$\mathrm{d}F^j = \sigma^{ij}\mathrm{d}A_i \quad (4.1-6)$$

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \quad (4.1-8)$$

$$\sigma_j^{\cdot i} = \sigma_j^{\ i} = \sigma_j^i \quad (4.1-11)$$

平衡方程(Equations of equilibrium)

物体内部 $\sigma^{ij}|_j + F^i = 0 \quad (4.2-2)$

物体表面 $P^i = \sigma^{ij} n_j \quad (4.2-4)$

应力张量的不变量(Invariants of stress tensor)

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_i^i = \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \sigma_{(3)} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_i^i\sigma_j^j - \sigma_j^i\sigma_i^j) = \sigma_{(1)}\sigma_{(2)} + \sigma_{(2)}\sigma_{(3)} + \sigma_{(3)}\sigma_{(1)} \\ I_3 &= \det\sigma_j^i = \sigma_{(1)}\sigma_{(2)}\sigma_{(3)} \end{aligned}\right\} \quad (4.3-5),\ (4.3-6)$$

最大剪应力(Max shearing stress)

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}|\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)}| \quad (4.4-9)$$

八面体剪应力(Octahedral shearing stress)

$$\tau_0 = \frac{1}{3}[(\sigma_{(1)} - \sigma_{(2)})^2 + (\sigma_{(2)} - \sigma_{(3)})^2 + (\sigma_{(3)} - \sigma_{(1)})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.5-2)$$

偏应力张量(Deviatoric stress tensor)

$$S_j^i = \sigma_j^i - \delta_j^i p,\ p = \frac{1}{3}\sigma_i^i \quad (4.6-1)\ (4.6-2)$$

偏应力张量的不变量(Invariants of deviatoric stress tensor)

$$D_1 = S_i^i = S_{(1)} + S_{(2)} + S_{(3)} = 0$$

$$D_2 = \frac{1}{2}S_j^iS_i^j = \frac{1}{2}[S_{(1)}^2 + S_{(2)}^2 + S_{(3)}^2] = \frac{3}{2}(\tau_0)^2 \quad (4.6-5)$$

$$D_3 = \det S_j^i = S_{(1)}S_{(2)}S_{(3)}$$

应力张量的物理分量(Physical components of stress tensor)

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{(ij)} &= \sigma^{ij}\frac{\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g^{ii}}}(i、j\ \text{不求和}) \\ \sigma_{(j)}^{(i)} &= \sigma_j^i\frac{\sqrt{g_{jj}}}{\sqrt{g^{ii}}}(i、j\ \text{不求和}) \end{aligned}\right\} \quad (4.7-4)\ (4.7-5)$$

非线性几何方程(Nonlinear geometric equations)

拉格朗日有限变形应变张量(Lagrangian finite strain tensor)

$$E_{KL} = \frac{1}{2}(U_K|_L + U_L|_K + U_M|_K U^M|_L) \quad (5.1-22)$$

欧拉有限变形应变张量(Eulerian finite strain tensor)

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_k|_l + u_l|_k - u_m|_k u^m|_l) \quad (5.1-23)$$

有限变形应变张量的相容方程(Compatibility equation of finite strain tensor)

$$
\begin{aligned}
& e_{kn,lm} + e_{lm,kn} - e_{km,ln} - e_{ln,km} + \\
& 2g^{rs}\{\Gamma^{(e)}_{knr}\Gamma^{(g)}_{lms} + \Gamma^{(g)}_{knr}\Gamma^{(e)}_{lms} - 2\Gamma^{(e)}_{knr}\Gamma^{(e)}_{lms} - \Gamma^{(e)}_{kmr}\Gamma^{(g)}_{lns} - \\
& \Gamma^{(g)}_{kmr}\Gamma^{(e)}_{lns} + 2\Gamma^{(e)}_{kmr}\Gamma^{(e)}_{lns}\} + 2e^{rs}\{\Gamma^{(g)}_{knr}\Gamma^{(g)}_{lms} - \Gamma^{(g)}_{kmr}\Gamma^{(g)}_{lns} - \\
& 2\Gamma^{(e)}_{knr}\Gamma^{(g)}_{lms} - 2\Gamma^{(g)}_{knr}\Gamma^{(e)}_{lms} + 4\Gamma^{(e)}_{knr}\Gamma^{(e)}_{lms} + 2\Gamma^{(e)}_{kmr}\Gamma^{(g)}_{lns} + \\
& 2\Gamma^{(g)}_{kmr}\Gamma^{(e)}_{lns} - 4\Gamma^{(e)}_{kmr}\Gamma^{(e)}_{lns}\} = 0
\end{aligned}
\tag{5.4-2}
$$

线性几何方程(Linear geometric equations)

小变形应变张量(Infinitesimal strain tensor)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j + u_j|_i) \tag{5.3-2}$$

转动张量(Rotation tensor)

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_i|_j - u_j|_i) \tag{5.3-4}$$

转动矢量(Rotation vector)

$$\omega^k = -\frac{1}{2}\in^{ijk}\omega_{ij} \tag{5.3-6}$$

相容方程

$$\varepsilon_{kn}|_{lm} + \varepsilon_{lm}|_{kn} - \varepsilon_{km}|_{ln} - \varepsilon_{ln}|_{km} = 0 \tag{5.4-3}$$

应变张量的不变量(Invariants of strain tensor)

$$
\begin{aligned}
& J_1 = \varepsilon^i_i = \varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(3)} \\
& J_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon^i_i\varepsilon^j_j - \varepsilon^i_j\varepsilon^j_i) = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)} + \varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)} + \varepsilon_{(3)}\varepsilon_{(1)} \qquad (5.5-4) \\
& J_3 = \det\varepsilon^i_j = \varepsilon_{(1)}\varepsilon_{(2)}\varepsilon_{(3)}
\end{aligned}
$$

偏应变张量(Deviatoric strain tensor)

$$e^i_j = \varepsilon^i_j - q\delta^i_j,\ q = \frac{1}{3}\varepsilon^i_i \qquad (5.5-6),(5.5-7)$$

偏应变张量的不变量(Invariants of deviatoric strain tensor)

$$
\begin{aligned}
& J'_1 = e^i_i = e_{(1)} + e_{(2)} + e_{(3)} = 0 \\
& J'_2 = \frac{1}{2}e^i_je^j_i = \frac{1}{2}[e^2_{(1)} + e^2_{(2)} + e^2_{(3)}] \qquad (5.5-10) \\
& J'_3 = \det e^i_j = e_{(1)}e_{(2)}e_{(3)}
\end{aligned}
$$

应变张量的物理分量(Physical components of strain tensor)

$$\varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij}\frac{1}{\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}}} \quad (i、j\ 不求和) \tag{5.6-3}$$

$$\varepsilon_{(j)}^{(i)} = \varepsilon_j^i \frac{\sqrt{g_{ii}}}{\sqrt{g_{LL}}} \quad (i、j 不求和) \tag{5.6-5}$$

大变形应力张量

第一类皮奥拉－基尔霍夫(Piola－kirchhoff)应力张量(拉格朗日(Lagrange)应力张量)

$$T^{iJ} = \mathscr{J} \frac{\partial X^J}{\partial x^j} \sigma^{ij} \tag{5.9-4}$$

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\mathscr{J}} T^{iM} \frac{\partial x^j}{\partial X^M} \tag{5.9-6}$$

第二类皮奥拉－基尔霍夫(Piola－kirchhoff)应力张量(基尔霍夫(Kirchhoff)应力张量)

$$S^{IJ} = \mathscr{J} \frac{\partial X^I}{\partial x^m} \frac{\partial X^J}{\partial x^n} \sigma^{mn} \tag{5.9-9}$$

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\mathscr{J}} S^{KL} \frac{\partial x^i}{\partial X^K} \frac{\partial x^j}{\partial X^L} \tag{5.9-10}$$

(5.9－4)、(5.9－6)、(5.9－9)、(5.9－10)式，各式中 $\mathscr{J}$ 为雅可比(Jacobi)行列式

$$\mathscr{J} = \left| \frac{\partial x^i}{\partial X^K} \right| \tag{5.8-3}$$

广义胡克定律(Generalized Hooke's law)

$$\sigma^{ij} = E^{ijlm} \varepsilon_{lm} \tag{6.1-1}$$

弹性张量(Elasticity tensor) E^{ijlm}

各向异性材料(Anisotropic material)

$$E^{ijlm} = E^{jilm} = E^{ijml} = E^{ijml} = E^{lmij} \tag{6.1-4}$$

各向同性材料(Isotropic material)

$$E^{ijlm} = \lambda g^{ij} g^{lm} + \mu (g^{il} g^{jm} + g^{im} g^{jl}) \tag{6.2-18}$$

$$= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{lm} + g^{il} g^{jm} + g^{im} g^{jl} \right) \tag{6.4-1}$$

广义胡克定律(各向同性材料)(generalized Hooke's Law of isotropic material)

$$\sigma_j^i = \lambda \varepsilon_m^m \delta_j^i + 2\mu \varepsilon_j^i \tag{6.2-20}$$

$$2\mu \varepsilon_j^i = \sigma_j^i - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_m^m \delta_j^i \tag{6.2-23}$$

$$\sigma_j^i = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_j^i + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m^m \delta_j^i\right) \qquad (6.4-3)$$

$$E\varepsilon_j^i = (1+\nu)\sigma_j^i - \nu\sigma_m^m \delta_j^i \qquad (6.4-5)$$

$$\sigma_m^m = \frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_m^m = 3K\varepsilon_m^m = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_m^m \qquad (6.4-4)$$

$$Ee_j^i = (1+\nu)S_j^i \qquad (6.5-3)$$

$$S_j^i = \frac{E}{1+\nu}e_j^i = 2\mu e_j^i \qquad (6.5-4)$$

弹性常数(Elastic constants)

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \qquad (6.3-4)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \qquad (6.3-7)$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \qquad (6.3-1)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{E - 2G}{2G} \qquad (6.3-3)$$

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (6.3-9)$$

应变能密度(Strain energy density)

$$W = \frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij} \qquad (6.1-5)$$

以位移表示的平衡方程

物体内部

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left[u^i|_j^j + \frac{1}{1-2\nu}u^j|_j^i\right] + F^i = 0 \qquad (7.3-4)$$

物体表面

$$P^i = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[(u^i|_j + u_j|^i) + \frac{2\nu}{1-2\nu}u^m|_m\delta_j^i\right]n^j \qquad (7.3-6)$$

以应力表示的相容方程

$$\sigma_n^k|_m^m + \frac{1}{1+\nu}\sigma_m^m|_n^k = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_n^k F^j|_j - (F^k|_n + F_n|^k) \qquad (7.4-12)$$

厚球壳(球坐标描述)(Thick walled spherical shell)

基本方程：$\dfrac{d^2 u_r}{dr^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{du_r}{dr}-\dfrac{2}{r^2}u_r=0$ (8.1-4)

厚圆柱壳(圆柱坐标描述)(Thick walled cylindrical shell)

基本方程：$\dfrac{d^2 u_r}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{du_r}{dr}-\dfrac{u_r}{r^2}=0$ (8.2-5)

等截面直杆扭转(Torsion of prismatic bars)

应力分量：$\sigma^{\alpha 3}=\psi|_\gamma \in^{\alpha\gamma}$ (8.3-11′)

基本方程：$\psi|_\alpha^\alpha=-2G\beta$ (8.3-18′)

扭　　矩：$T_t=2\iint \psi\, dr^\alpha ds^\beta \in_{\alpha\beta}$ (8.3-15′)

平面应变(Plane strain)

$$\left.\begin{aligned}&\text{平衡方程：}\sigma^{\alpha\beta}|_\beta+F^\alpha=0\\&\text{物理方程：}\sigma_\beta^\alpha=\lambda\delta_\beta^\alpha u^\gamma|_\gamma+\mu(u^\alpha|_\beta+u_\beta|^\alpha)\\&\text{相容方程：}\sigma_\alpha^\alpha|_\gamma^\gamma=-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}F^\gamma|_\gamma\end{aligned}\right\}\quad(8.6-9)$$

平面应力(Plane stress)

$$\left.\begin{aligned}&\text{平衡方程：}\sigma^{\alpha\beta}|_\beta+F^\alpha=0\\&\text{物理方程：}\sigma_\beta^\alpha=\lambda'\delta_\beta^\alpha u^\gamma|_\gamma+\mu(u^\alpha|_\beta+u_\beta|^\alpha)\\&\text{相容方程：}\sigma_\alpha^\alpha|_\gamma^\gamma=-\frac{2(\lambda'+\mu)}{\lambda'+2\mu}F^\gamma|_\gamma\end{aligned}\right\}\quad(8.6-19)$$

$$\lambda'=\frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}=\frac{\nu E}{1-\nu^2}$$

艾里(Airy)应力函数

$$\sigma^{\alpha\beta}=\in^{\alpha\gamma}\in^{\beta\delta}\Phi|_{\gamma\delta}+g^{\alpha\beta}V \quad (8.6-22')$$

$$F^\alpha=-V|_\gamma g^{\alpha\gamma}$$

平面应变：$\Phi|_{\beta\gamma}^{\beta\gamma}+\dfrac{1-2\nu}{1-\nu}V|_\alpha^\alpha=0$ (8.6-23a′)

平面应力：$\Phi|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}+(1-\nu)V|_\alpha^\alpha=0$ (8.6-23b′)

若不计体力，则：

$$\sigma^{\alpha\beta}=\in^{\alpha\gamma}\in^{\beta\delta}\Phi|_{\gamma\delta} \quad (8.6-22'')$$

$$\Phi|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}=0 \quad (8.6-24')$$

铁木辛柯(Timoshenko)梁理论

基本方程 $\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[k^2 GA\left(\dfrac{dw}{dx}+\psi\right)\right]+p(x)=0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(EI\dfrac{d\psi}{dx}\right)-k^2 GA\left(\dfrac{dw}{dx}+\psi\right)=0 \end{cases}$ (9.1-9)

弯矩：$M = EI\dfrac{d\psi}{dx}$

剪力：$F_S = k^2 GA\left(\psi+\dfrac{dw}{dx}\right)$ (9.1-5)

欧拉-伯努利(Euler-Bernoulli)梁理论

基本方程：$\dfrac{d^2}{dx^2}\left(EI\dfrac{d^2 w}{dx^2}\right)=p(x)$ (9.2-3)

弯矩：$M = -EI\dfrac{d^2 w}{dx^2}$

剪力：$F_S = -\dfrac{d}{dx}\left(EI\dfrac{d^2 w}{dx^2}\right)$ (9.2-2)

弹性基础梁(Beam on an elastic foundation)

基本方程：$EI\dfrac{d^4 w}{dx^4}+kw=-p_0$ (9.2-4)

中厚板理论(赖斯纳(Reissner)板理论)

基本方程：$Dw\Big|_{\beta\gamma}^{\beta\gamma} = p - \dfrac{h^2}{6k^2(1-\nu)}p\Big|_{\beta}^{\beta}$

$\dfrac{h^2}{12k^2}\left(D\psi_{\alpha}\Big|_{\beta\gamma}^{\beta\gamma}+p\big|_{\alpha}\right)\Big|_{\lambda}^{\lambda} - D\psi_{\alpha}\Big|_{\beta\gamma}^{\beta\gamma} - p\big|_{\alpha}=0$

(9.3-23′)

弯矩、扭矩：

$M^{\alpha\beta} = D\left[\dfrac{1-\nu}{2}(\psi_{\gamma}|^{\beta}+\psi^{\beta}|_{\gamma})g^{\alpha\gamma}+\nu\psi_{\gamma}|^{\gamma}g^{\alpha\beta}\right]$ (9.3-16a)′

剪力：$F_S^{\alpha} = k^2 Gh(\psi_{\gamma}+w|_{\gamma})g^{\alpha\gamma}$ (9.3-16b)′

薄板理论(Thin plate)

基本方程：$Dw\Big|_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} - p$ (9.4-4)′

弯矩：$M^{\alpha\beta} = -D[(1-\nu)w|^{\alpha\beta}+\nu w|_{\lambda}^{\lambda}g^{\alpha\beta}]$

剪力：$F_S^{\alpha} = -Dw\Big|_{\beta\gamma}^{\beta}g^{\alpha\gamma}$ (9.4-3)

应变能(Strain energy)

应变能密度(Strain energy density)

$$W(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}[\lambda\varepsilon_m^m\varepsilon_i^i + 2G\varepsilon^{ij}\varepsilon_{ij}] \qquad (10.1-16)$$

梁—单位梁长的应变能(Strain energy per unit length)

铁木辛柯梁: $W_B = \frac{1}{2}[EIm^2 + k^2AGq^2]$ (10.2-4b)

欧拉-伯努利梁: $W_B = \frac{1}{2}EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2$ (10.2-5)

平板—单位板面积的应变能(Strain energy per unit area)

中厚板: $W_P = \frac{1}{2}D[\nu m^2 + (1-\nu)m^{\alpha\beta}m_{\alpha\beta}] + \frac{1}{2}k^2Ghq^\alpha q_\alpha$

(10.2-7)

薄板: $W_P = \frac{1}{2}D[(1-\nu)w|^{\alpha\beta}w|_{\alpha\beta} + \nu w|_\lambda^\lambda w|_\beta^\beta]$ (10.2-9)

矩形薄板: $W_P = \frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$

$\left. 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]$ (10.2-10)

余应变能(Complementary strain energy)

余应变能密度(Complementary energy density):

$W^*(\sigma^{ij}) = \sigma^{ij}\varepsilon_{ij} - W(\varepsilon_{ij})$ (10.6-7a)

铁木辛柯梁—单位梁长的余应变能

$$W_B^* = \frac{1}{2}\left\{\frac{M^2}{EI} + \frac{F_S^2}{k^2GA}\right\} \qquad (10.6-10)$$

中厚板—单位板面积的余应变能:

$$W_P^* = \frac{(1+\nu)M^{\alpha\beta}M_{\alpha\beta} - \nu M^2}{2D(1-\nu^2)} + \frac{F_{S\alpha}F_S^\alpha}{2k^2Gh}, M = M_{\alpha\alpha}$$

最小总势能原理(Principle of minimum total potential energy)

总势能: $E(u_i) = \int_B [W(\varepsilon_{ij}) - F^iu_i]dV - \int_{S_1} P^{i*}u_i dS$

(10.5-1)

$\delta E = 0, \quad \delta^2 E \geqslant 0$ (10.3-8a),(10.5-7)

最小总余能原理(Principle of minimum total complementary energy)

总余能: $E^*(\sigma^{ij}) = \int_B W^*(\sigma^{ij})dV - \int_{S_2} u_i^* T^i dS$ (10.8-1)

$$\delta E^* = 0, \delta^2 E^* \geqslant 0 \qquad (10.7-10),(10.8-7)$$

赫林格－赖斯纳变分原理

• 能量泛函 (energy functional)

$$E_R = \int_B \left[W(\varepsilon_{ij}) - \sigma^{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\sigma^{ij}(u_i|_j + u_j|_i) - F^i u_i \right] dV - \int_{S_1} P^{i*} u_i dS - \int_{S_2} P^i (u_i - u_i^*) dS \qquad (10.9-10)$$

或

$$E_R = \int_B \left[\frac{1}{2}\sigma^{ij}(u_i|_j + u_j|_i) - F^i u_i - W^c(\sigma^{ij}) \right] dV - \int_{S_1} P^{i*} u_i dS - \int_{S_2} P^i (u_i - u_i^*) dS \qquad (10.9-12a)$$

$\delta E_R \quad 0$

参考书目

1 Fung Y C. Foundations of solid mechanics. Englewood cliffs, N. J.: Prentice-Hall., 1965

2 Flügge W. Tensor analysis and continuum mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1972

3 Eringen C. Nonlinear Theory of Continuous media New York: McGraw-Hill, 1962

4 Spain B. Tensor calculus. Edinfurgh: Oliver and Boyd, 1953

5 Sokolnikoff I S. Tensor analysis. New York: Wiley, 1964

6 Love A E H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4th ed. New York: Dover Publications, 1944

7 Sokolnikoff J S. Mathematical theory of elasticity. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1956

8 Reismann H, Pawlik P. Elasticity, theory and applications. New York: John Wiley & sons, 1980

9 Timoshenko S, Goodier J N. Theory of elasticity. 3rd ed. New-York: McGraw-Hill, 1970

10 黄克智等.张量分析 北京:清华大学出版社,1986

11 郭乾荣译.张量计算初步及其在力学上的应用.北京:人民教育出版社,1959

12 Reddy J, Rasmnssen M. Advanced engineering analysis. New York: John Wiley & Sons. 1982

13 钱伟长,叶开源.弹性力学.北京:科学出版社,1956

14 王龙甫.弹性理论.北京:科学出版社,1979

15 徐芝纶.弹性力学.北京:人民教育出版社,1982

16 杜庆华等.弹性理论.北京:科学出版社,1986

17 徐次达.固体力学加权残值法.上海:同济大学出版社,1989

18 Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. 3rd ed. Oxford: Pergamon Press, 1982

19 Zienkiewicz O C. The finite element method. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1977

20 曹富新.力学中的张量计算.北京:铁道出版社,1985

21 陆明万,罗学富.弹性理论基础.北京:清华大学出版社,2001

22 Green A E, Zerna W. Theoretical elasticity. 2nd ed. London: Oxford university Press, 1968

23 杨桂通.弹性力学.北京:高等教育出版社,1998

24 吴家龙.弹性力学.北京:高等教育出版社,2001

索　　引

（按汉语拼音字母顺序）

Z

主要外国人名译名对照表

Airy, G. B.	艾里
Almansi, E.	阿尔曼西
Bernoulli, D.	伯努利
Bubnov, I. G.	布勃诺夫
Cauchy, A. - L.	柯西
Christoffel. E. B.	克里斯托费尔
Cramer, G.	克拉默
Dirac, P. A. M.	狄拉克
Einstein, A.	爱因斯坦
Euclid	欧几里得
Euler. L.	欧拉
Galerkin, B. G.	伽辽金
Gauss, K. F.	高斯
Germain, S.	热尔曼
Green, G.	格林
Hamilton, W. R.	哈密顿
Hellinger, E.	赫林格
Hooke, R.	胡克
Jacobi, C. G. J.	雅可比
Kirchhoff, G. R.	基尔霍夫
Kronecker, L.	克罗内克
Lagrange, J. - L.	拉格朗日
Lamé, G.	拉梅
Laplace. P. S.	拉普拉斯
Love, A. E. H.	乐甫

Piola, J.	皮奥拉
Poisson, S. - D.	泊松
Prandtle, L.	普朗特
Rayleigh, Lord	瑞利
Reissner, E.	赖斯纳
Ricci, G.	里奇
Riemann, G. F. B.	黎曼
Ritz, W.	里茨
Saint - Venant, A. J. C. B. de	圣维南
Stokes, G. G.	斯托克斯
Timoshenko, S. P.	铁木辛柯
Voigt, W.	沃伊特
Young, T.	杨